Быстрая математика:

секреты устного счета

Проверенная временем методика для детей и взрослых

БИЛЛ ХЭНДЛИ

SHOUT
SHARE
IT

Annotation

Предлагаются простые методы, позволяющие с быстротой молнии выполнять в уме такие вычисления, как умножение, деление, сложение и вычитание чисел, операции с дробями, извлечение квадратных и кубических корней.

Для широкого круга читателей.

- Хэндли Билл
  - Предисловие
  - Введение
  - Глава 1
  - Глава 2
  - Глава 3
  - Глава 4
  - Глава 5
  - Глава 6
  - Глава 7
  - Глава 8
  - Глава 9
  - Глава 10
  - Глава 11
  - Глава 12
  - Глава 13
  - Глава 14
  - Глава 15
  - Глава 16
  - Глава 17
  - Глава 18
  - Глава 19
  - Глава 20
  - Глава 21
  - Глава 22
  - Глава 23
  - Глава 24
  - Послесловие
  - Приложение А
  - Приложение Б
  - Приложение В
  - Приложение Г
  - Приложение Д
  - Приложение Е
  - Приложение Ж

    - Приложение 3
    - Словарь
- notes
    - 1
    - 2

Хэндли Билл
«БЫСТРАЯ МАТЕМАТИКА: СЕКРЕТЫ УСТНОГО СЧЕТА»

Предисловие

Многие люди спрашивают у меня, похожи ли мои методы на те, что были разработаны Яковом Трахтенбергом[1]. Он вдохновил миллионы людей своими методами и революционным подходом к математическим вычислениям. Книга Трахтенберга вдохновила и меня, когда я еще был подростком. Прочитав ее, я с восторгом обнаружил, что способен производить сложные вычисления в уме, которые без его методов казались невозможными. Его идеи привили мне подлинный интерес к экспериментам над числами. Я очень многим обязан ему.

Мои методы в целом отличаются от тех, что разработал он, хотя в некоторых областях наши подходы аналогичны или пересекаются. Мы с ним, например, используем ту же формулу для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на пятерку. Трахтенберг также использовал метод выбрасывания девяток для проверки полученного ответа. Он предлагал различные правила для умножения на любое число от 1 до 12, я же использую одно-единственное правило. Должен сказать, что всякий раз, когда кто-нибудь приравнивает мои методы к системе Трахтенберга, я воспринимаю это как комплимент.

Мои методы являются сугубо личной разработкой, так же как моими собственными являются общий подход и стиль. Любые недостатки, которые вы, возможно, встретите в настоящей книге, также мои собственные.

В настоящее время я работаю над книгой для учителей, где объясняю, как использовать мои методы в учебном процессе. Она содержит множество практических примеров. Если вас заинтересовала моя разработка, пишите мне по электронной почте, и я вышлю вам подробные сведения.

Билл Хэндли
bhandley@speedmathematics.com

Введение

Вообразите, что вы способны умножать большие числа в уме — при этом быстрее, чем успели бы набрать их на калькуляторе. Вообразите, что вы молниеносно можете проверить — опять-таки в уме — полученный результат. Как бы отреагировали ваши коллеги, если бы вы извлекали квадратные и даже кубические корни в уме? Не приобретете ли вы благодаря этому репутацию очень умного человека? Разве не начнут ваши друзья и коллеги относиться к вам по-другому, с большим уважением? А как насчет преподавателей, лекторов, клиентов, вашего руководителя?

Люди приравнивают математические способности к интеллекту. Если вы в состоянии выполнять операции умножения, деления, возведения в квадрат и извлечения квадратного корня в уме быстрее, чем ваши друзья успеют достать из кармана калькулятор, вас сочтут человеком высочайшего интеллекта.

Я научил одного ребенка некоторым подходам, с которыми вы познакомитесь в данной книге, до того, как он пошел в первый класс, и в результате на протяжении всей учебы в школе многие принимали его за вундеркинда.

К людям, овладевшим подобной техникой, начинают по-иному относиться в семье, школе и на рабочем месте. И поскольку к ним *относятся* как к людям большого ума, они и сами начинают *поступать* умнее.

Зачем учить основам арифметики и теории чисел?

Однажды я был приглашен на радиопередачу. После беседы со мной ведущий поинтересовался у присутствовавшего в студии представителя математического факультета одного из ведущих австралийских университетов, что он думает обо мне и моих методах. Тот сказал, что учить студентов правилам вычислений — это пустая трата времени. Зачем кому-то уметь возводить в квадрат, перемножать числа, извлекать квадратный корень и делить числа в уме, если существуют калькуляторы? Многие родители затем звонили в студию и говорили, что подобное отношение преподавателя объясняет, почему их детям так трудно дается математика в школе.

Мне также доводилось обсуждать с педагогами значение

базовых операций с числами. Многие утверждают, что детям необязательно знать, что 5 плюс 2 равняется 7 или что произведение 2 на 3 равно 6.

Когда такие мнения высказываются учениками в классе, я прошу их достать из портфелей калькуляторы. Затем я велю им нажимать соответствующие кнопки, пока диктую задачу: «Два плюс три, умноженное на четыре, равняется…»

У некоторых учеников калькулятор выдает 20 в качестве ответа. У других же в ответе получается 14.

Какой из этих двух ответов является правильным? Как калькулятор может давать два различных ответа, если вы нажимаете одни и те же кнопки?

Это происходит потому, что существует определенный порядок, в котором следует производить арифметические операции. Сначала надо умножать или делить, а уж потом складывать и вычитать. Одни калькуляторы учитывают эту особенность, другие — нет.

Калькулятор не способен думать за вас. Необходимо отдавать себе отчет, в каком порядке вы производите вычисления. Если вы не знаете математики, калькулятор мало чем сможет вам помочь.

Ниже приводится несколько причин, которые дают мне основания утверждать, что математика не просто нужна, а очень важна для любого человека, независимо от того, учится он или нет.

• Люди считают математические способности признаком высокого интеллекта. Если вам хорошо дается математика, люди склонны считать вас человеком большого ума. К учащимся, успешно сдающим математику, обычно с повышенным уважением относятся как преподаватели, так и сокурсники. Преподаватели часто относят их к потенциально более способным студентам, и сами они зачастую учатся лучше — не только по математике, но и по другим предметам.

• Овладение методами работы с числами — особенно это касается вычислений в уме — помогает лучше понять законы математики.

• Вычисления в уме повышают способность к концентрации, укрепляют память и развивают умение удерживать в голове сразу несколько идей одновременно. Человек, который осваивает методы таких вычислений, обучается работе одновременно с несколькими мыслительными конструкциями.

• Вычисления в уме научат вас «чувствовать» числа, а также быстро оценивать правильность результата.

• У человека, понимающего математику, лучше развита способность к латеральному мышлению. Подходы, которые

предлагаются в данной книге, помогут вам развить способность к мышлению по альтернативным на правлениям; в результате вы научитесь искать нестандартные подходы к решению задач и выполнению вычислений.

• Математические знания придадут вам уверенности в своих силах, в результате чего повысится ваша самооценка. Методы, предлагаемые здесь, укрепят вашу уверенность в своих умственных способностях, интеллекте и умении решать математические задачи.

• Методы проверки позволяют тому, кто выполняет вычисление, немедленно распознать ошибку. Если вы допустили ошибку, проверка позволит мгновенно определить ее и исправить. Если ход решения верен, проверка это подтвердит и подарит вам дополнительное удовлетворение от осознания корректности ваших действий. Возможность распознавать ошибки параллельно выполнению вычислений дарит лишнюю мотивацию тому, кто выполняет вычисления.

• Математика имеет очень большое значение в повседневной жизни. Смотрите ли вы спортивную программу или покупаете продукты в магазине, вычисления в уме всегда находят применение. Нам всем приходится время от времени делать быстрые вычисления в уме.

Математический склад ума

Правда ли, что не все люди рождаются с математическим складом ума, что некоторые имеют исходное преимущество перед другими в плане лучшего освоения математики? И наоборот, верно ли, что некоторые люди в меньшей степени наделены способностью решать математические задачи?

Различие между теми людьми, кто добивается в математике многого, и теми, кто достигает малого, состоит не в мозге, с которым они рождаются, а в том, как они его используют. Те, кто добивается большего, используют более эффективные подходы, чем остальные.

Данная книга научит вас более эффективным подходам. Методы, о которых идет речь, гораздо проще, чем те, которым вас учили ранее, так что в итоге вы будете решать задачи на вычисление гораздо быстрее, допуская при этом меньше ошибок.

Представьте себе двух учеников и преподавателя, который только что задал им задачу. Ученик А говорит: «Трудная задача.

Учитель не научил нас решать задачи такого рода. Как же мне ее решать? Получается, что учитель ставит перед нами задачи непомерной сложности».

Ученик Б говорит: «Трудная задача. Учитель не научил нас решать задачи такого типа. Как же мне ее решить? Учитель знает уровень наших знаний и то, какие задачи мы умеем решать, поэтому того, чему он нас научил до сих пор, должно быть достаточно, чтобы мы справились с решением самостоятельно. С чего же мне начать?»

Кто из учеников, по-вашему, скорее решит задачу? Очевидно, что ученик Б.

Что случится в следующий раз, когда им будет предложена аналогичная задача? Ученик А скажет: «Я не могу ее решить. Это такая же задача, что и в прошлый раз. Она слишком трудная. Такие задачи я плохо решаю. Почему бы вам не задать нам что-нибудь полегче?»

А ученик Б скажет: «Это напоминает мне прошлую задачу. Думаю, я смогу ее решить. Я уже более или менее научился решать такие задачи. Они не очень легкие, но решать их можно. Итак, как же мне к ней подступиться?»

У обоих учеников выработался шаблон поведения: у одного — пораженческий, у другого — ориентированный на победу. Связано ли это каким-то образом с их интеллектуальным потенциалом? Возможно, но необязательно. Они вполне могут быть равны интеллектом. Речь в большей степени идет об отношении учеников к задаче, которое может определяться тем, чему их научили в прошлом, а также зависеть от опыта — положительного и отрицательного. Недостаточно просто предложить людям поменять свое отношение. Это лишь вызовет у них раздражение. Я предпочитаю говорить им, что они в состоянии добиться более высокого результата, и затем показываю, как это сделать. Пусть положительный опыт меняет их отношение, а не увещевания. От положительного опыта лица у людей светлеют и они восклицают: «Ура! Я могу!»

Мое первое правило математики выглядит так:

> Чем проще метод, используемый вами для решения задачи, тем быстрее вы ее решите и тем меньше вероятность того, что вы допустите ошибку.

Чем сложнее метод, который вы используете, тем больше времени уйдет на решение задачи и тем выше ваши шансы допустить ошибку. Люди, использующие более совершенные методы, быстрее получают ответ и допускают меньше ошибок, тогда как те, кто применяет менее эффективные методы,

медленнее получают ответ и допускают больше ошибок. Связь с интеллектом здесь не такая большая, тут вовсе не требуется особого, математического, склада ума.

Немного о самой книге

Данная книга написана простым и доступным языком. Прочитав ее, вы станете понимать математику, как никогда ранее, и будете поражены, насколько простой она может быть. Вычисления начнут доставлять вам удовольствие, какого вы и представить себе не могли.

В каждой главе предлагается целый ряд примеров для решения. Пытайтесь решать их самостоятельно после разобранных мною учебных примеров, вместо того чтобы просто пассивно читать. Вы обнаружите, что примеры я даю вовсе не сложные. Прорабатывая решение каждого примера под моим руководством, вы по-настоящему освоите методы и принципы, лежащие в основе решения, а также обретете стимул продолжать чтение дальше. Лишь путем проработки решения этих примеров вы сможете осознать, насколько просты предлагаемые здесь методы.

Я настоятельно рекомендую потратить время на то, чтобы самостоятельно решить примеры как на бумаге, так и в уме. Изучив данную книгу, вы удивитесь, насколько совершенными стали ваши математические навыки.

Глава 1
Умножение: часть первая

Насколько хорошо вы знаете таблицу умножения?

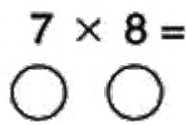
Хотелось бы вам освоить таблицу умножения для чисел от 1 до 10 менее чем за 10 минут? А таблицу для чисел от 10 до 20 менее чем за полчаса? Все это возможно, используя методы, о которых я рассказываю в этой книге. Я лишь предполагаю, что вы достаточно хорошо знаете таблицу умножения для числа 2, а также что вы владеете операциями сложения и вычитания для небольших чисел.

Умножение чисел до 10

Начнем с того, что научимся умножать всевозможные числа от 1 до 10 вплоть до 10 х 10. Метод состоит в следующем.

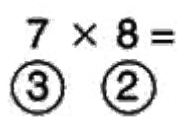
Возьмем в качестве примера произведение 7 х 8.

Запишем 7 х 8 = на листе бумаги и нарисуем кружки под каждым из двух перемножаемых чисел.



Рассмотрим первый из множителей, число 7. Сколько ему недостает до числа 10? Ответ: 3. Впишем 3 в кружок под числом 7. Теперь обратимся к числу 8. Что надо вписать в кружок под числом 8? Сколько недостает до 10? Ясное дело, что 2. Вписываем 2 в кружок под множителем 8.

Вот что у нас получилось:

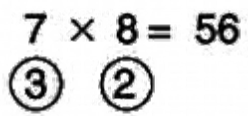


Теперь выполним вычитание накрест. Это значит, надо вычесть любое из чисел в кружке (3 или 2) из числа не прямо над

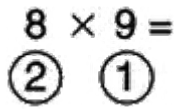
ним, а из того, что расположено по диагонали, то есть над другим числом в кружке. Иными словами, вы вычитаете либо 3 из 8, либо 2 из 7. Делать это нужно всего один раз, поэтому выбирайте тот вариант, который вам кажется легче. В любом случае результат получается один и тот же: 5. Это первая цифра вашего ответа.

8 – 3 = 5 или **7 – 2 = 5**

Теперь перемножим числа в кружках. 3 на 2 дает 6. Это будет последняя цифра вашего ответа. Таким образом, ответом будет 56. Вот так выглядит решенная задача:



Если вы умеете без труда перемножать 2 на другие числа до 10, то с легкостью сможете запомнить таблицу умножения от 1 до 10 и выше. Закрепим освоенное на еще одном примере: 8 х 9.



Сколько не хватает в каждом случае до 10? Ответ: 2 и 1. Вписываем 2 и 1 в кружки под перемножаемыми числами. Что мы делаем теперь? Производим вычитание накрест.

8 – 1 = 7 или **9 – 2 = 7**

7 является первой цифрой ответа. Запишем ее. Теперь перемножим оба числа в кружках:

2 х **1 = 2**

2 является последней цифрой нашего ответа. Таким образом, ответом является 72.

Легко, не так ли? Теперь попробуйте решить несколько примеров самостоятельно. Вместо того чтобы записывать ответы прямо здесь, в книге, вы можете сделать это на отдельном листе бумаги или в блокноте — впоследствии можно снова вернуться к примерам в книге и не знать заранее ответов.

а) 9 х 9 = _; б) 8 х 8 = _; в) 7 х 7 = _; г) 7 х 9 = _; д) 8 х 9 = _; е) 9 х 6 = _; ж) 5 х 9 = _; з) 8 х 7 = _

Решите каждый из примеров, даже если вы и так помните таблицу умножения. Речь идет о базовом методе, которым вы будете пользоваться в дальнейшем при перемножении чисел.

Как прошло решение? Вот ответы к примерам:

а) 81; б) 64; в) 49; г) 63; д) 72; е) 54; ж) 45; з) 56

Не это ли самый простой способ выучить таблицу умножения?

Стоит ли учить таблицу умножения?

Теперь, когда вы овладели методом перемножения чисел, значит ли это, что вам не нужно учить таблицу умножения?

По правде сказать, и да, и нет.

Не нужно потому, что теперь вы в состоянии, после некоторой тренировки, вычислить произведение любой пары чисел практически мгновенно. Если же вы уже выучили таблицу умножения, тогда освоение данного метода принесет дополнительную пользу.

Если же вы еще не знаете таблицы умножения, то у вас появился шанс выучить ее в рекордные сроки. После того как вы просчитали произведение 7 х 8 = 56 десять и более раз, обнаружится, что вы запомнили ответ раз и навсегда. Иными словами, вы выучили часть таблицы умножения. Повторяю, что это самый простой известный мне способ изучения таблицы умножения, к тому же самый занимательный. И вам не надо переживать за то, что не запомнили таблицу назубок, — вы всегда сможете вычислить необходимое произведение так быстро, будто знаете ответ наизусть.

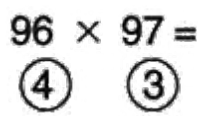
Умножение чисел больше 10

Работает ли данный метод при перемножении чисел больше 10?

Конечно, работает. Попробуем на примере:

96 х **97** =

К какому большему числу следует привести эти числа? Сколько не хватает до чего? До 100. Вписываем 4 в кружок под 96 и 3 под 97.



Что мы делаем теперь? Мы вычитаем накрест: 96 минус 3, так же как и 97 минус 4, равно 93. Это первая (передняя) часть ответа. Что мы делаем затем? Перемножаем числа в кружках. Произведение 4 на 3 равняется 12. Это последняя (задняя) часть ответа. Сам ответ, соответственно, равен 9312.

$$\underset{\textcircled{4}}{96} \times \underset{\textcircled{3}}{97} = 9312$$

Какой метод проще: этот или тот, которому вас учили в школе? Разумеется, этот.

Припомните мое первое правило математики:

> Чем проще метод, используемый вами для решения задачи, тем быстрее вы ее решите и тем меньше вероятность того, что вы допустите ошибку.

Теперь предлагаю вам несколько примеров для самостоятельного решения:

а) 96 х 96 = __; б) 97 х 95 = __; в) 95 х 95 = __; г) 98 х 95 = __; д) 98 х 94 = __; е) 97 х 94 = __; ж) 98 х 92 = __; з) 97 х 93 = __

Ответы для самоконтроля:

а) 9216; б) 9215; в) 9025; г) 9310; д) 9212; е) 9118; ж) 9016; з) 9021

Все ли у вас получилось правильно? Если вы ошиблись, вернитесь назад, найдите, где допустили промах, и откорректируйте ответ. Поскольку данный метод столь разительно отличается от традиционных подходов к перемножению пар чисел, нет ничего удивительного, что поначалу вы будете допускать ошибки.

Соперничая в скорости с калькулятором

Я участвую в телевизионных шоу, где меня часто просят посоревноваться в скорости с калькулятором. Обычно это происходит следующим образом. Крупным планом камера показывает руку с калькулятором, а я нахожусь на заднем плане. Кто-нибудь, кого не видно в кадре, ставит задачу: например, умножить 96 на 97. Как только произносится 96, я немедленно

вычитаю его из 100 и получаю 4. Когда произносится второе число — 97, — я вычитаю из него 4 и получаю 93. Я не говорю 93, а произношу «девять тысяч триста…» своим тягучим австралийским выговором и одновременно вычисляю в уме: «4 на 3 равно 12».

Таким образом, практически без паузы я заканчиваю: «Девять тысяч триста. двенадцать». Хотя я не считаю себя «человеком-калькулятором» — так как многие мои ученики делают это быстрее меня, — я по-прежнему без труда ухитряюсь выговорить ответ до того, как кто-нибудь успевает получить ответ на калькуляторе.

Теперь решите последнюю серию примеров еще раз, но теперь выполняя все вычисления у себя в голове. Скоро вы убедитесь, что это легче, чем кажется. Я всегда говорю своим ученикам: вам надо решить пример три или четыре раза в голове, прежде чем станет по-настоящему легко; после этого вычисление, выполненное каждый последующий раз, будет пустяком по сравнению с вычислением, выполненным впервые. Поэтому попробуйте раз пять, прежде чем сдаться и сказать, что это для вас слишком сложно.

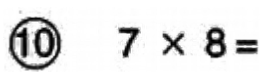
Вас не впечатляет, что вам теперь под силу? Ваш мозг не стал лучше в одночасье: просто вы используете его более эффективно благодаря простым, но более совершенным методам математических вычислений.

Глава 2
Опорное число

Мы еще не до конца разобрались с методом перемножения чисел. Для задач, которые мы рассматривали до сих пор, метод работал безупречно. Теперь, после некоторой модификации, мы сможем применить его к любым числам.

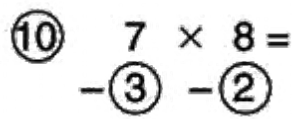
Число 10 в качестве опорного

Вернемся к примеру 7 x 8.



Число 10 слева от примера является опорным. Это число, из которого мы вычитаем множители.

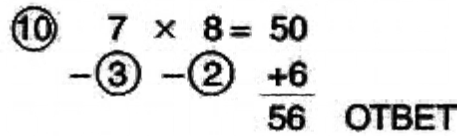
Итак, запишем опорное число слева от примера. Теперь спросим себя, числа, которые мы перемножаем, являются больше (выше) или меньше (ниже), чем опорное число? В рассматриваемом случае множитель меньше (ниже), чем опорное число, оба раза. Поэтому рисуем кружки ниже множителей. На сколько множители меньше опорного числа? На 3 и 2 соответственно. Вписываем 3 и 2 в кружки. 7 равно 10 минус 3, поэтому ставим знак «минус» перед кружком с цифрой 3. 8 — это 10 минус 2, значит, ставим знак «минус» и перед кружком с цифрой 2.



Теперь вычитаем накрест. 7 минус 2 и 8 минус 3 дают 5. Записываем 5 после знака равенства. Теперь умножим 5 на опорное число 10. 5, умноженное на 10, дает 50, поэтому записываем 0 после 5. (При умножении любого числа на 10 достаточно дописать к числу справа нуль.) 50 является нашим промежуточным результатом.

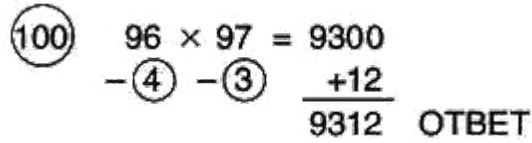
Теперь перемножим числа в кружках. 3 на 2 дает 6. Прибавим результат к 50 и получим окончательный ответ: 56.

Полностью решенный пример выглядит так:



Число 100 в качестве опорного

Каким было опорное число для примера 96 х 97 в главе 1? 100, поскольку мы также выясняли, сколько не хватает у 96 и 97, чтобы получилось 100. Пример, решенный полностью, теперь выглядел бы так:



Прием для счета в уме, который я приводил выше, просто заставляет вас использовать данный метод. Давайте перемножим 98 на 98, и вы поймете, что я имею в виду.

Вычитаем 98 и 98 из 100 и получаем 2 и 2. Отнимаем 2 от 98 и получаем 96. Но мы говорим не «девяносто шесть», а «девять тысяч шестьсот.». 9600 получится, когда мы умножим 96 на вспомогательное число 100. Теперь перемножим числа в кружках. Произведение 2 на 2 равняется 4, поэтому окончательным ответом будет 9604.

Решите следующие примеры в уме:

а) 96 х 96 = __; б) 97 х 97 = __; в) 99 х 99 = __; г) 95 х 95 = __; д) 97 х 98 = __

У вас должны получиться следующие ответы:

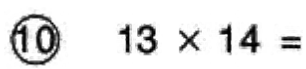
а) 9216; б) 9409; в) 9801; г) 9025; д) 9506

Теперь вы, возможно, уже умеете быстро находить ответы для подобных примеров. Наверняка вполне освоили данный метод и применительно к числам меньше 10, решая соответствующие примеры с завидной скоростью. Например, если вы захотите вычислить, сколько будет 9 х 9, то немедленно «увидите» по

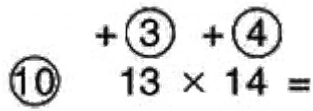
единичке под каждой девяткой. 9 минус 1 дает 8 — и вы сразу получаете 80 (произведение 8 на 10). 1 на 1 дает 1. Таким образом, в ответе вы получаете 81.

Умножение чисел от 10 до 20

Посмотрим, как работает метод для перемножения чисел от 10 до 20. В качестве примера возьмем 13 х 14, а 10 — в качестве опорного числа.

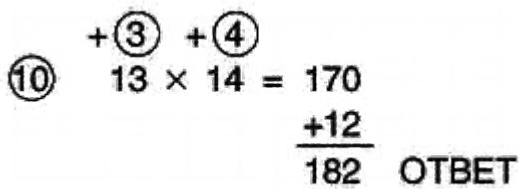


И 13, и 14 больше (выше) опорного числа 10, поэтому рисуем кружки над множителями. На сколько они больше опорного числа? На 3 и 4 соответственно. Поэтому вписываем 3 и 4 в кружки над 13 и 14. 13 равно 10 плюс 3, поэтому ставим знак «плюс» перед цифрой 3; 14 равно 10 плюс 4, поэтому ставим знак «плюс» перед цифрой 4.



Как и прежде, складываем накрест. И 13 плюс 4, и 14 плюс 3 равно 17. Пишем 17 после знака равенства. Умножаем 17 на опорное число 10 и получаем 170 — это наш промежуточный результат, записываем его после знака равенства.

В качестве последнего шага перемножаем числа в кружках. 3, умноженное на 4, равно 12. Прибавляем 12 к 170 и получаем ответ: 182. Вот так выглядит полностью решенный пример:



Если число, которое перемножаем, больше (выше) опорного, мы помещаем кружок над числом. Если число меньше (ниже)

опорного, мы рисуем кружок под числом.

> Если числа в кружках выше множителей, мы складываем накрест, если же они ниже, тогда вычитаем накрест.

Теперь попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

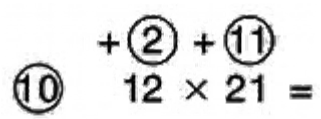
а) 12 х 15 = __; б) 13 х 15 = __; в) 12 х 12 = __; г) 13 х 13 = __; д) 12 х 14 = __; е) 12 х 16 = __; ж) 14 х14 = __; з) 15 х 15 = __; и) 12 х 18 = __; к) 16 х 14 = __

Ответы:

а) 180; б) 195; в) 144; г) 169; д) 168; е) 192; ж) 196; з) 225; и) 216; к) 224

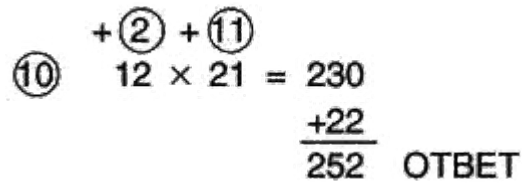
Если вы где-то допустили ошибку, прочтите раздел заново и выясните, что сделали не так, после чего попробуйте решить примеры снова.

А как бы вы перемножали 12 и 21? Давайте разберем данный пример.



В качестве опорного числа берем 10. Оба множителя больше 10, поэтому рисуем кружки над ними. 12 больше 10 на 2, а 21 — на 11, поэтому вписываем 2 и 11 в соответствующие кружки. 21 плюс 2 равно 23, которое после умножения на 10 дает 230. 2, умноженное на 11, равно 22, которое в сумме с 230 равняется 252.

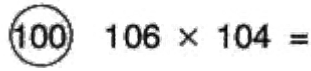
Полностью решенный пример выглядит следующим образом:



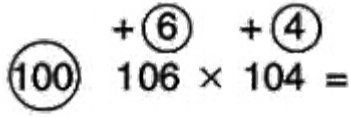
Умножение чисел больше 100

Можно ли использовать данный метод для перемножения чисел больше 100? Разумеется.

Чтобы умножить 106 на 104, возьмем 100 в качестве опорного числа.



Множители превышают опорное число 100, поэтому рисуем кружки над 106 и 104. На сколько они превышают 100? На 6 и 4. Вписываем 6 и 4 в кружки. Перед ними надо поставить знак «плюс» (как перед положительными числами), поскольку 106 равняется 100 плюс 6, а 104–100 плюс 4.

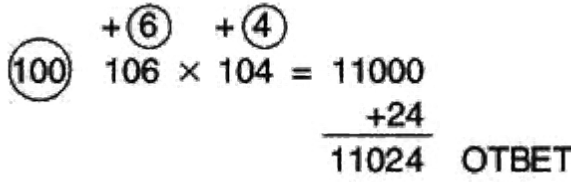


Складываем накрест. 106 плюс 4 равно 110. Запишем 110 после знака равенства.

Умножим 110 на опорное число 100. Как умножить любое число на 100? Приписать к нему справа два нуля. Получаем промежуточный результат: 11000.

Теперь перемножим числа в кружках: 6 х 4 = 24. Приплюсуем результат к 11000 и получаем 11024.

Полностью решенный пример выглядит следующим образом:



Попробуйте решить несколько примеров самостоятельно:

а) 102 х 114 = __; б) 103 х 112 = __; в) 112 х 112 = __; г) 102 х 125 = __

Ответы:

а) 11628; б) 11536; в) 12544; г) 12750

Немного попрактиковавшись, вы сможете решать все подобные примеры без ручки и бумаги. В глазах других людей это будет очень эффектно.

Решение примеров в уме

При использовании изложенного выше подхода очень важно то, что возникает перед вашим мысленным взором, или то, что вы произносите про себя. Это может помочь вам решать задачи с большей легкостью и с более высокой скоростью.

Давайте умножим 16 на 16 и затем посмотрим, что мы могли бы при этом проговаривать про себя.

Складываем накрест. 16 плюс 6 (от второго множителя 16) равно 22. Потом умножаем на 10 и получаем 220. 6, умноженное на 6, равно 36. Прибавляем сначала 30, а потом 6. 220 плюс 30 равно 250, плюс еще 6 — получаем 256.

Про себя мы могли бы при этом проговаривать: «Шестнадцать плюс шесть, двадцать два, двести двадцать. Тридцать шесть, двести пятьдесят шесть». Обретя некоторый навык, вы сможете опускать половину всего этого. Вам не надо будет комментировать буквально каждый свой шаг. Достаточно будет сказать: «Двадцать два, двести пятьдесят шесть».

Практикуйтесь в том, как вы проговариваете про себя ход решения. Произносить только самое необходимое во время вычисления — значит более чем вдвое сократить время решения.

Как вы станете вычислять 7 x 8 в уме? Вы немедленно представите себе цифры 3 и 2 в кружках под 7 и 8. Затем отнимите 2 от 7 (или 3 от 8) и после того, как тут же умножите на 10, скажете вслух: «Пятьдесят». 3 на 2 равно 6. Вслух же вы произнесете практически без паузы: «Пятьдесят… шесть».

А как насчет 6 x 7?

Вы немедленно представите себе цифры 4 и 3 в кружках под 6 и 7. 6 минус 3 дает 3, поэтому вы скажете про себя: «Тридцать». 4 на 3 дает 12, плюс 30–42. Про себя же вы просто проговорите: «Тридцать, сорок два».

Не очень сложно, не так ли? Чем больше примеров вы решите самостоятельно, тем легче вам будет выполнять эти вычисления.

Когда использовать опорное число?

Люди спрашивают у меня: «Когда нужно использовать опорное число?» Предыдущий пример дает ответ на этот вопрос. Вычисляя произведение 6 на 7 в уме, вы автоматически используете опорное число — 10. Ваш промежуточный результат

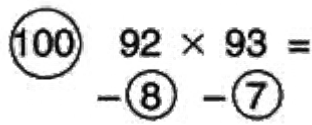
равен 30. Вы говорите: «Тридцать.» Затем вычисляете: 4 на 3 равно 12. Вы не скажете вслух: «Тридцать двенадцать». Вам известно, что необходимо прибавить 12 к 30, чтобы получить ответ.

Ответ прост: всегда используйте опорное число.

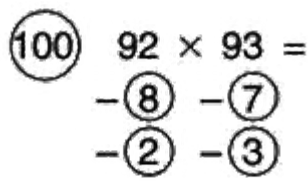
По мере освоения описанных здесь методов вы обнаружите, что автоматически используете опорное число, даже когда уже не записываете его во время вычислений.

Комбинация методов

Посмотрим на следующий пример:



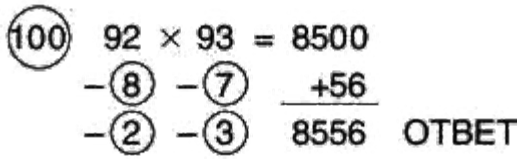
Он может представлять определенные трудности, если мы не знаем, сколько будет 8 х 7. Можно пририсовать еще пару кружков под первыми, чтобы вычислить произведение 8 х 7. Пример теперь выглядит так:



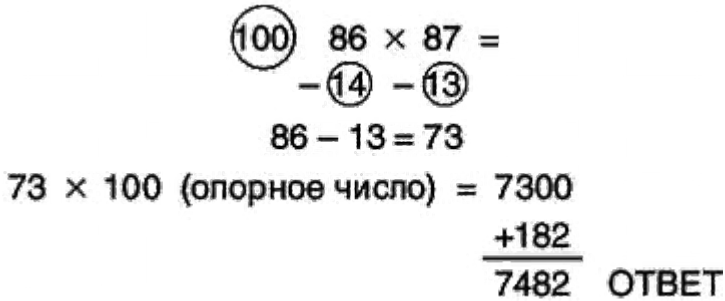
Вычтем 8 из 93 путем отнимания 10 и прибавления 2. 93 минус 10 равно 83, плюс 2 — получаем 85. Умножаем на опорное число 100 и имеем промежуточный результат: 8500. Чтобы перемножить 8 на 7, используем нижний ряд чисел в кружках, то есть 2 и 3.

7 – 2 = 5 и **2** х **3 = 6**

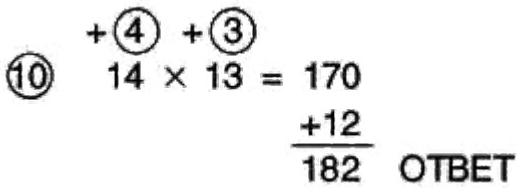
Ответ равен 56. Вот как теперь выглядит решение примера:



Можно также, к примеру, умножить 86 на 87.



Можно использовать только что изученный метод для перемножения чисел от 10 до 20.



Вы сможете проделывать все это в уме после некоторой тренировки.

Попробуйте решить следующие примеры:

а) 92 х 92 = __; б) 91 х 91 = __; в) 91 х 92 = __; г) 88 х 85 = __; д) 86 х 86 = __; е) 87 х 87 = __

Ответы:

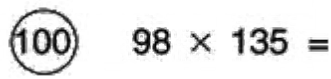
а) 8464; б) 8281; в) 8372; г) 7480; д) 7396; е) 7569

Совместное использование методов, изложенных в настоящей книге, открывает для вас поистине безграничные возможности вычислений. Поэкспериментируйте сами.

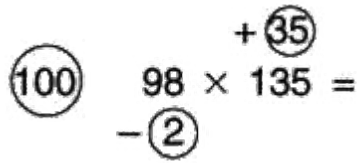
Глава 3
Перемножение чисел над и под опорным числом

До сих пор мы перемножали числа, которые располагались либо выше, либо ниже опорного числа. А как нам перемножать числа, одно из которых находится выше опорного, а другое — ниже?

Посмотрим, как поступать, на примере произведения 96 х 135. В качестве опорного числа будем использовать 100:

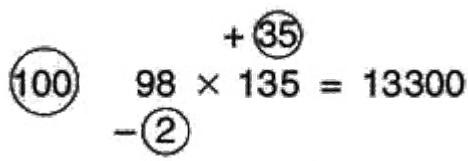


98 меньше опорного числа 100, поэтому кружок рисуем под ним. На сколько меньше? На 2, значит, вписываем в кружок цифру 2. 135 больше 100, поэтому рисуем кружок над 135. На сколько больше? На 35, следовательно, вписываем в кружок 35.

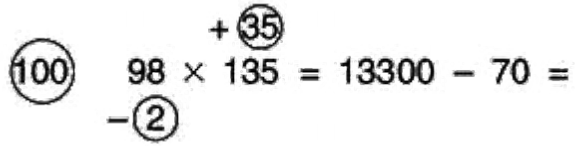


135 равняется 100 плюс 35, поэтому ставим знак «плюс» перед 35. 98 — это 100 минус 2, значит, перед 2 в кружке надо поставить минус.

Теперь вычисляем накрест. Берем либо 98 плюс 35, либо 135 минус 2. 135 минус 2 равно 133. Записываем 133 после знака равенства. Теперь умножим 133 на опорное число 100. 133 на 100 равняется 13300. (Чтобы умножить на 100 любое число, достаточно дописать к нему справа два нуля.) Вот так теперь выглядит решение примера:



Теперь перемножим числа в кружках. 2 на 35 дает 70. Правда, это не совсем так. На самом деле нам необходимо перемножить 35 и *минус* 2. В ответе, соответственно, будет *минус* 70. Теперь решение примера выглядит следующим образом:



Способ быстрого вычитания

Отвлечемся на некоторое время от решения примера и посмотрим, каков самый короткий путь для нахождения разности двух чисел. Как самым простым способом вычесть 70 из числа? Разрешите мне поставить вопрос по-другому: каков простейший способ вычесть в уме 9 из 56?

56 — 9 =

Я уверен, что вы знаете правильный ответ, но как вы его получили? Некоторые люди сначала отняли бы 6 от 56, чтобы получить 50, а затем отняли бы 3, что осталось от 9, и получили бы 47.

Кое-кто отнял бы 10 от 56 и получил бы 46. Затем прибавил бы к ответу 1, поскольку отнята была лишняя единица (10 = 9 + 1). В результате опять получилось бы 47.

Еще кто-нибудь решал бы данную задачу столбиком на листе бумаги. При этом ему пришлось бы переносить и занимать разряды в уме. Это, возможно, самый длинный способ решения. Не забывайте, что:

> Самый простой путь решения задачи является наискорейшим способом и самым защищенным от ошибок.

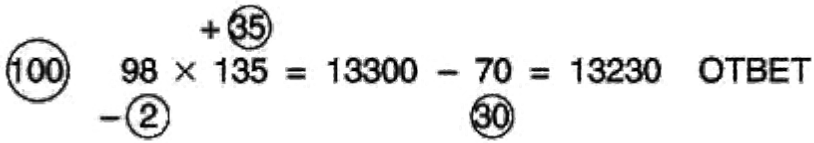
Для большинства людей самый простой способ вычитания 9 из числа — это отнимание от него сначала 10, а затем прибавление 1. Самый простой способ отнять 8 — это вычесть 10, а затем прибавить 2. Чтобы отнять 7, нужно вычесть 10, а потом прибавить 3 к ответу. Вот еще несколько «простейших» способов:

• Каков самый простой способ вычесть 90 из числа? Отнять от него 100 и прибавить 10.

• Каков самый простой способ вычесть 80 из числа? Отнять от него 100 и прибавить 20.

• Каков самый простой способ вычесть 70 из числа? Отнять от него 100 и прибавить 30.

Если вернуться к нашему примеру, как нам отнять 70 от 13300? Вычесть сначала 100, а затем прибавить 30. Просто, правда? Попробуем еще раз. 13300 минус 100. 13200. Плюс 30. 13230. Вот как теперь выглядит полностью решенный пример:



Немного попрактиковавшись, вы сможете решать подобные примеры в уме. Попробуйте решить следующие примеры:

а) 98 х 145 = __; б) 97 х 125 = __; в) 95 х 120 = __; г) 96 х 125 = __; д) 98 х 146 = __;

е) 9 х 15 = __; ж) 8 х 12 = __; 3) 7 х 12 = __

Ответы:

а) 14210; б) 12125; в) 11400; г) 12000; д) 14308; е) 135; ж) 96; з) 84

Произведение чисел в кружках

Правило, согласно которому находят произведение чисел в кружках, звучит так:

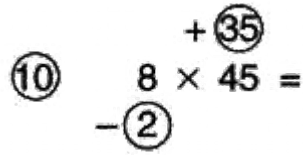
> Если оба кружка находятся ***над*** или под множителями, то мы ***прибавляем*** их произведение к промежуточному результату. Когда один из кружков располагается ***над*** множителями, а другой — ***под*** ними, мы ***вычитаем*** произведение чисел в кружках из промежуточного результата.

Говоря математическим языком, когда мы перемножаем два положительных (с плюсом) числа, то получаем положительное (с плюсом) число в ответе. Когда перемножаем два отрицательных (с минусом) числа, мы также получаем положительное (с плюсом) число. Когда же умножаем положительное (с плюсом) число на отрицательное (с минусом), мы получаем отрицательное (с

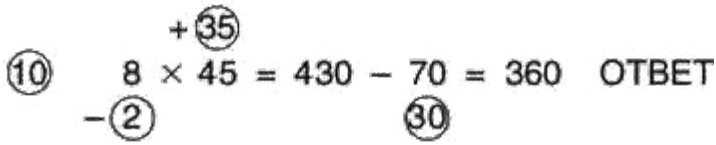
минусом) число.

Применим ли наш метод к произведению 8 х 45?

Попробуем проверить. Возьмем в качестве опорного число 10. 8 меньше 10 на 2, а 45 — на 35 больше.



Отнимаем 2 от 45 или прибавляем 35 к 8. 45 минус 2 дает 43; умножаем на опорное число 10, получаем 430. Минус 2, умноженное на 35, дает 70. Чтобы вычесть 70 из 430, отнимаем сначала 100, что даст нам 330, и прибавляем 30, получив в итоге 360.



Значит ли это, что можно вовсе не учить таблицу умножения? Нет, я просто предлагаю другой способ ее запоминания. После того как вы десять или более раз вычислили, что 7 на 8 дает 56, а 13 на 14 равно 182, вам больше не надо будет этого делать: ответ сам врежется в память. Это гораздо более продуктивный способ, чем простая зубрежка.

Мы все еще не закончили с умножением, однако сделаем перерыв и посвятим некоторое время закреплению того, что изучили до сих пор. Если решение некоторых заданий по-прежнему представляет для вас трудность, не переживайте: у нас впереди еще очень много примеров.

В следующей главе мы рассмотрим простой метод проверки получаемых ответов.

Глава 4
Проверка ответов: часть первая

Вы хотели бы решать правильно все без исключения задачи в любой школьной контрольной? Хотелось бы вам приобрести репутацию человека, который никогда не допускает ошибок в вычислениях? Если да, то я научу вас, как обнаружить и исправить ошибку еще до того, как кто-нибудь заметит ваш промах.

Я часто говорю своим ученикам, что в математике недостаточно вычислить ответ; задача не является решенной до тех пор, пока вы не сделали проверку полученного ответа.

Я не разрабатывал метода проверки ответов, который собираюсь вам предложить. Математики знают о нем уже, наверное, тысячу лет, но дело в том, что он по какой-то причине не был включен в школьную программу в большинстве стран.

В детстве я, бывало, допускал массу ошибок в вычислениях чисто по оплошности. Я знал, как решать задачи, и делал все правильно. Но ответ все равно получался неверным. Я то забывал перенести разряд, то по невнимательности записывал неверные числа и еще бог весть по какой причине допускал досадные ошибки.

Учителя и родители постоянно напоминали мне, что я всегда должен перепроверять свои решения. Но единственный известный мне способ сделать это — решить задачу заново. Однако если ответ получался другой, откуда мне было знать, в каком случае он являлся правильным? Быть может, задачу я решил верно именно в первый раз, а при повторном решении допустил ошибку? Поэтому приходилось решать задачу в третий раз. Если два ответа из трех сходились, то это, как я рассуждал, вероятно, и был правильный ответ. А что, если я просто-напросто дважды допустил одну и ту же ошибку? Мне посоветовали решать задачу двумя различными способами. Это был дельный совет. Однако на контрольных никому не дают времени на то, чтобы трижды решить одно и то же задание. Если бы кто-нибудь в то время научил меня тому, чему я собираюсь научить вас, я бы, наверное, прослыл математическим гением.

Мне досадно, что этот метод был известен в те времена, но никто меня ему не научил. Он называется суммированием цифр числа, или выбрасыванием девяток. Ниже описано, как он работает.

Чтобы проверить, верный ли получен ответ, мы используем числа-подстановки вместо тех, которые задействованы в примере. Запасные в футбольной или баскетбольной команде служат для подмены игроков во время матча. Нечто подобное мы будем делать и с числами, найдя для них подходящих «запасных». Последние помогут нам проверить, к правильному ли ответу мы пришли с основными числами в задаче.

Рассмотрим это на примере. Допустим, что вы только что перемножили 13 и 14 и получили 182. Надо проверить, правильный ли это ответ.

13 x **14** = **182**

Сначала у нас идет число 13. Найдем сумму его цифр и получим первую подстановку:

1 + **3** = **4**

4 становится подстановкой для 13.

Следующим числом идет 14. Найдем и ему подстановку, для чего сложим его цифры:

1 + **4** = **5**

5 служит подстановкой для 14.

Теперь выполним умножение, используя вместо исходных чисел подстановки:

4 x **5** = **20**

20 — это опять двузначное число, поэтому сложим и его цифры и получим наше контрольное число, которое поможет нам определить правильность ответа:

2 + **0** = **2**

2 — это контрольное число, служащее для определения правильности ответа.

Если мы верно решили исходный пример, тогда сумма цифр ответа должна совпасть с контрольным числом.

Складываем цифры исходного полученного ответа:

1 + **8** + **2** = **11**

11 — это двузначное число, а нам нужно однозначное, поэтому сложим и его цифры:

1 + **1** = **2**

2 — это тоже число-подстановка, но на этот раз для проверяемого ответа. Поскольку оно совпало с контрольным числом, пример решен правильно.

Попробуем еще раз, взяв произведение 13 x 15:

13 x **15** = **195**

1 + **3** = **4** (подстановка для 13)

1 + 5 = 6 (подстановка для 15)

4 x 6 = 24

24 — двузначное число; для получения однозначного сложим его цифры:

2 + 4 = 6

6 — наше контрольное число.

Теперь, чтобы проверить, правильно ли мы решили пример, сложим цифры исходного полученного ответа.

1 + 9 + 5 = 15

Превратим 15 в однозначное число:

1 + 5 = 6

Поскольку данный ответ совпадает с контрольным числом, можно быть уверенными, что мы не допустили ошибки в решении исходного примера.

Выбрасывание девяток

Есть способ, который позволяет еще больше сократить по времени данную процедуру. Когда бы нам ни встречалось число 9 в наших вычислениях в ходе проверки, можно смело его вычеркивать. В случае предыдущего полученного ответа — 195, — вместо того чтобы находить сумму 1 + 9 + 5, мы могли просто вычеркнуть 9 и складывать уже только 1 + 5, что дало бы в итоге 6. Это никак не сказывается на результате, но позволяет избежать лишней работы и сэкономить время. Такие вещи мне всегда по душе.

А как насчет ответа на первый решенный пример — 182?

Мы складывали 1 + 2 + 8, получили 11, а затем сложили 1 + 1 и получили контрольное число 2. В числе 182 две цифры дают в сумме 9: 1 и 8. Просто вычеркните их, и в результате у вас получится требуемое число 2. И делать ничего не надо.

Решим еще один пример, чтобы посмотреть, как работает метод:

167 x 346 = 57782

1 + 6 + 7 = 14

1 + 4 = 5

С первым числом никакого фокуса не получилось. 5 является подстановкой для 167.

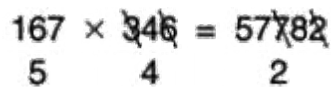
3 + 4 + 6 =

Сразу замечаем, что 3 + 6 = 9, поэтому вычеркиваем 3 и 6, как будто их и не было. Остается 4, которое является

подстановкой для числа 346.

Имеются ли девятки или цифры, дающие в сумме 9, в ответе примера, который мы, собственно, и проверяем? Да, есть: 7 + 2 = 9, поэтому вычеркиваем эти цифры. Остальные складываем: 5 + 7 + 8 = 20. Затем 2 + 0 = 2. Это число, служащее подстановкой для ответа.

Я обычно записываю числа-подстановки карандашом над или под множителями в примере. Это могло бы выглядеть следующим образом:



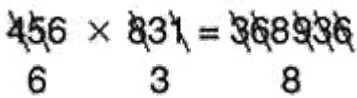
Итак, правильный ли ответ был получен?

Перемножаем числа-подстановки: 5 на 4 дает 20. Сумма цифр в числе 20 равна 2 (2 + 0 = 2). Мы получили число, равное контрольному, поэтому ответ является верным.

Рассмотрим еще пример:

456 x **831** = **368936**

Запишем под множителями числа-подстановки:



Это не составило труда, поскольку мы вычеркнули 4 и 5 из первого множителя, и у нас осталось 6; затем мы вычеркнули 8 и 1 из второго множителя, и у нас осталось 3; и потом нам удалось вычеркнуть почти все цифры в ответе.

Теперь посмотрим, что дают нам числа-подстановки. 6 на 3 равно 18, цифры которого в сумме дают 9, которое тоже можно вычеркнуть. Остается 0. Контрольным же числом у нас является 8. Значит, мы где-то допустили ошибку.

Заново решив пример, получаем 378936.

Правильный ли ответ мы получили на этот раз? 936 можно вычеркнуть, после чего складываем первые три цифры: 3 + 7 + 8 = 18, что в сумме дает 9, от которого тоже остается 0, поэтому его можно выбросить. Имеет место совпадение с контрольным числом, значит, на сей раз ответ получен верный.

Доказывает ли метод выбрасывания девяток, что мы получили верный ответ? Нет, но мы можем быть почти уверены в правильности ответа (см. главу 16). Например, предположим, что мы получили в ответе последнего примера 3789360, по ошибке добавив лишний нуль в его конце. Он не отразится на проверке

при выбрасывании девяток, и мы не сможем определить, допущена ошибка или нет. Однако в тех случаях, когда использование метода указывает на ошибку, мы можем быть абсолютно уверены, что это так.

Выбрасывание девяток является простым и быстрым способом проверки, который позволяет легко обнаруживать ошибки. Метод поможет вам безошибочно решать контрольные по математике, можете быть уверены.

Каким образом работает данный метод?

Загадайте число и умножьте его на 9. Сколько будет 4 на 9? 36. Сложим цифры этого числа (3 + 6), и в результате получится 9.

Попробуем с другим числом. 3 на 9 равно 27. Сложим цифры (2 + 7), и у нас получится снова 9.

11 на 9 дает 99. 9 плюс 9 равно 18. Неверный ответ? Не так быстро. 18 — двузначное число, поэтому опять сложим цифры: 1 + 8. Снова в ответе получается 9.

Если умножить любое число на 9, сумма полученного числа всегда даст 9, если продолжать складывать цифры, пока не получится однозначное число. Это простой способ узнать, делится ли число на 9 без остатка.

Если цифры числа дают в сумме 9 или число, кратное ему, значит, само число без остатка делится на 9. Вот почему, если умножить любое число на 9 или число, кратное ему, цифры числа, полученного в результате умножения, должны давать в сумме 9 (пока не получится однозначное число). Например, вам необходимо проверить, правильно ли решен следующий пример:

135 x **83615** = **11288025**

Сложим цифры первого множителя:

1 + **3** + **5** = **9**

Чтобы проверить ответ, не нужно складывать цифры второго множителя (83615), поскольку нам известно, что сумма цифр числа 135 дает 9. Если ответ верен, его цифры также должны давать в сумме 9.

Найдем сумму цифр ответа:

1 + **1** + **2** + **8** + **8** + **0** + **2** + **5** =

Можно вычеркнуть 8 + 1 дважды, остается 2 + 2 + 5, что дает 9. Итак, проверка показала, что ответ верен.

Можно обнаружить и другие интересные вещи.

Если цифры числа дают в сумме отличное от 9 число, тогда оно является тем остатком, который вы получите в результате деления исходного числа на 9.

Возьмем, к примеру, 14. 1 плюс 4 дает 5. Итак, 5 — это сумма цифр числа 14. Это остаток, который вы получите, если разделите 14 на 9. Проверим: 14 один раз делится на 9, а остаток составляет 14 — 9, что дает 5. Если прибавите 3 к числу, вы прибавите 3 к остатку от деления этого числа на 9. Если удвоить число, опять-таки, удвоится остаток. Иными словами, что бы вы ни делали с числом, вы делаете это с остатком от деления на 9, поэтому такие остатки могут служить числами-подстановками.

Почему мы используем остатки от деления на 9? Разве нельзя использовать остатки от деления, например, на 17? Конечно, можно, однако деление на 17 представляет собой такое хлопотное дело, что проверка правильности полученного ответа в итоге окажется сложнее, чем сама задача. Мы выбираем число 9, поскольку существует простой способ для определения остатка от деления на него.

Более подробно о том, почему данный метод работает, вы узнаете в приложении Д.

Глава 5
Умножение: часть вторая

В главе 1 мы узнали, как перемножать числа, используя простой метод, превращающий эту операцию в незатейливое занятие. Он легок в применении, когда множители являются числами, расположенными недалеко от 10 или 100. А как насчет перемножения чисел, находящихся вблизи 30 или 60? Можно ли и для них использовать изученный метод? Безусловно.

Мы выбирали числа 10 и 100 в качестве опорных, поскольку на них легко умножать. Метод будет прекрасно работать и с другими опорными числами, однако надо стараться выбирать те из них, на которые легко умножать.

Умножение по множителям

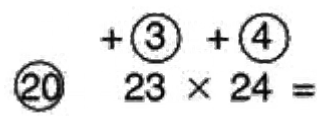
Легко умножать на 20, поскольку 20 равно 2 x 10, на которые умножать очень легко. Речь идет об умножении по множителям, а 10 и 2 являются множителями числа 20.

10 x **2** = **20**

Рассмотрим пример:

23 x **24** =

23 и 24 больше, чем опорное число 20, поэтому рисуем кружки над множителями. Больше, но на сколько? На 3 и 4 соответственно. Вписываем эти числа в соответствующие кружки, которые мы нарисовали вверху, потому что речь идет о положительных числах (23 = 20 + 3, 24 = 20 + 4).



Складываем накрест, как раньше:

23 + **4** = **27** или **24** + **3** = **27**

Теперь умножим полученный ответ на опорное число 20. Для этого умножим сначала на 2, а потом на 10:

27 x **2** = **54**

54 x **10** = **540**

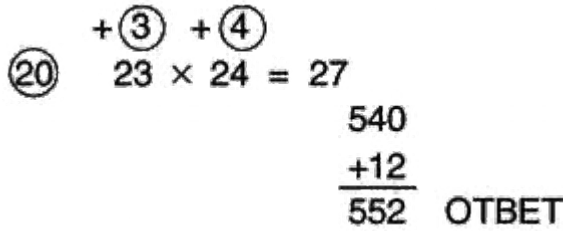
(Позднее в этой же главе мы рассмотрим простой способ

умножения 27 на 2.) В остальном все то же самое. Перемножаем числа в кружках и прибавляем к промежуточному результату 540.

3 x **4** = **12**

540 + **12** = **552**

Полностью решенный пример выглядит так:



Проверка ответов

Применим то, чему мы научились в главе 4, чтобы проверить, верный ли получили ответ:

23 × 24 = 552
5612
3

Числами-подстановками для 23 и 24 будут 5 и 6 соответственно.

5 x **6** = **30**

3 + **0** = **3**

3 — это наше контрольное число.

Цифры исходного ответа (552) дают в сумме 3:

5 + **5** + **2** = **12**

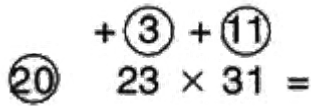
1 + **2** = **3**

Полученное число равно контрольному, значит, ответ мы получили верный.

Попробуем решить еще один пример:

23 x **31** =

Пишем 3 и 11 в кружках над 23 и 31, поскольку наши множители больше опорного числа 20 на 3 и 11 соответственно.



Складывая накрест, получаем 34:

31 + 3 = 34 или 23 + 11 = 34

Умножаем полученный ответ на опорное число 20. Для этого сначала умножим 34 на 2, а то, что получится, — на 10.

34 x 2 = 68

68 x 10 = 680

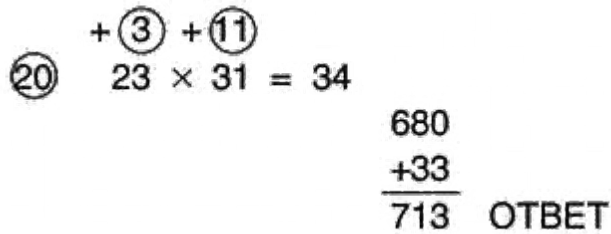
Это наш промежуточный ответ. Теперь перемножаем числа в кружках:

3 x 11 = 33

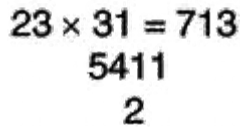
Прибавим 33 к 680:

680 + 33 = 713

Полностью решенный пример выглядит следующим образом:



Проверку ответа осуществляем с помощью выбрасывания девяток.



Перемножим числа-подстановки, а затем суммируем цифры ответа:

Это совпадает с нашим контрольным числом, поэтому 713 можно считать верным ответом.

Вот несколько примеров, которые предлагаются вам для самостоятельного решения. Когда закончите, проверьте полученные вами ответы выбрасыванием девяток.

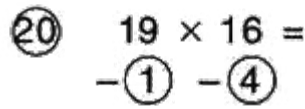
а) 21 x 26 = __; б) 24 x 24 = __; в) 23 x 23 = __; г) 23 x 27 = __; д) 21 x 36 = __; е) 26 x 24 = __

Вы должны уметь решать эти примеры в уме. Это нетрудно, если немного попрактиковаться.

Умножение чисел меньше 20

А как насчет перемножения чисел, которые меньше 20? Если они (или хотя бы одно из них) больше 15, но меньше 20, можно использовать 20 в качестве опорного числа. Решим пример:

Взяв 20 в качестве опорного числа, получим:



Вычитаем накрест:

16 — 1 = 15 или **19 — 4 = 15**

Умножаем на 20:

15 x **2 = 30**

30 x **10 = 300**

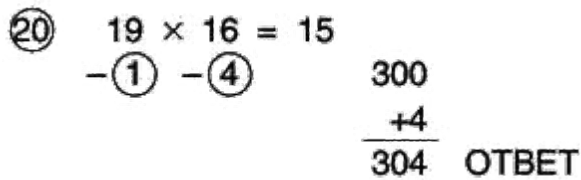
300 является нашим промежуточным ответом.

Теперь перемножим числа в кружках и прибавим результат к промежуточному ответу:

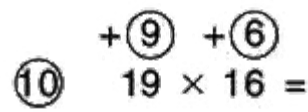
1 x **4 = 4**

300 + 4 = 304

Полностью решенный пример выглядит так:



Попробуем решить тот же пример, взяв на этот раз 10 в качестве опорного числа:



Сложим накрест, а затем умножим результат на 10, получив промежуточный ответ:

19 + 6 = 25

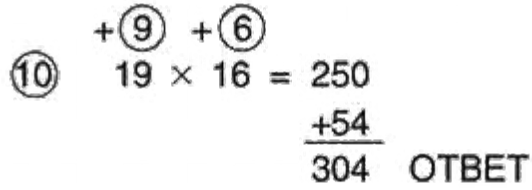
10 x **25 = 250**

Перемножим числа в кружках и прибавим результат к промежуточному ответу:

9 x **6 = 54**

250 + 54 = 304

Полностью решенный пример выглядит следующим образом:

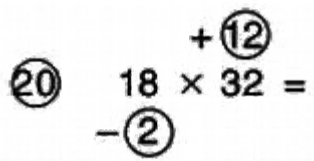


Это подтверждает ранее полученный результат.

Большой разницы между двумя использованными опорными числами нет. Это вопрос личных предпочтений. Просто выбирайте то опорное число, с которым вам легче работать.

Числа больше и меньше 20

Третий случай — это когда одно число больше, а другое меньше 20. Например:



Можно либо сложить 18 и 12, либо вычесть 2 из 32, а затем умножить результат на опорное число:

32 — 2 = 30

30 x **20 = 600**

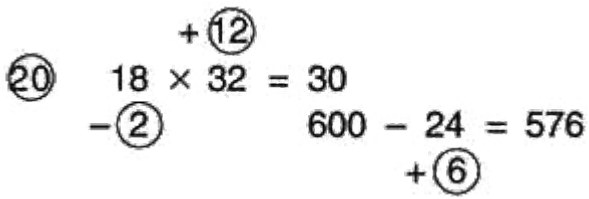
Теперь перемножаем числа в кружках:

2 x **12 = 24**

На самом деле мы перемножаем *минус* 2 и 12, поэтому ответом будет —24.

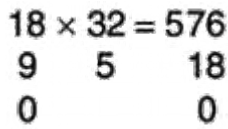
600 — 24 = 576

Решение примера выглядит следующим образом:



(Чтобы отнять 24, вычитаем сначала 30, а затем прибавляем 6.)

Проверим ответ путем выбрасывания девяток:

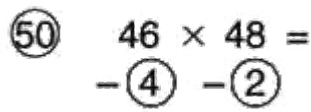


Произведение 0 x 5 равно 0, поэтому ответ верен.

Умножение еще больших чисел

В предыдущем разделе речь шла о способе перемножения пар чисел вплоть до 30 x 30. Как быть, если надо перемножить числа еще большей величины? В этом случае в качестве опорного числа можно использовать 50. Умножать на него легко, поскольку 50 — это половина 100, или 100, деленное на 2. Поэтому, чтобы умножить на 50, можно умножить число сначала на 100, а затем разделить результат на 2.

Давайте попробуем на примере:



Вычитаем накрест:

46 — 2 = 44 или **48 — 4 = 44**

Умножим 44 на 100:

44 x **100 = 4400**

Про себя проговариваем при этом так: «44 на 100 равно 4400». Теперь берем половину, что равносильно умножению 44 на 50, и получаем 2200.

4400: **2 = 2200**

Теперь перемножим числа в кружках и прибавим результат к 2200:

$$4 \times 2 = 8$$
$$2200 + 8 = 2208$$

$$\underset{-4\ -2}{50\quad 46 \times 48 = 4400}$$

$$\begin{array}{r} 2200 \\ +8 \\ \hline 2208 \end{array} \quad \text{ОТВЕТ}$$

Что может быть проще? Разберем еще один пример:

$$\underset{+3\ +7}{53 \times 57 =}$$
$$50 \quad 53 \times 57 =$$

Складываем накрест, затем умножаем результат на опорное число (умножаем при этом на 100, а затем делим на 2):

57 + 3 = 60

60 x 100 = 6000

6000: 2 = 3000

Перемножаем числа в кружках и прибавляем результат к 3000:

3 x 7 = 21

3000 + 21 = 3021

Полностью решенный пример теперь выглядит так:

$$\underset{+3\ +7}{50 \quad 53 \times 57 = 6000}$$

$$\begin{array}{r} 3000 \\ +21 \\ \hline 3021 \end{array} \quad \text{ОТВЕТ}$$

Решим следующий пример:

$$\underset{+2\ +13}{52 \times 63 =}$$
$$50 \quad 52 \times 63 =$$

Складываем накрест и умножаем результат на опорное число

(умножаем сначала на 100, а затем делим результат на 2):

63 + 2 = 65

65 x 100 = 6500

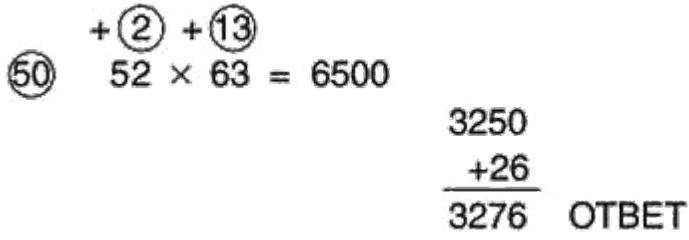
Теперь надо разделить на 2.

Никаких проблем! Говорим про себя: «Половина от шести тысяч — это три тысячи. Половина от пятисот — это двести пятьдесят. Всего получается три тысячи двести пятьдесят».

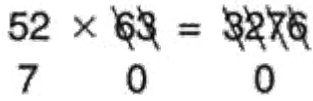
Теперь перемножим числа в кружках:

2 x 13 = 26

Прибавив 26 к промежуточному результату 3250, получаем 3276. Полностью решенный пример теперь выглядит так:



Проверим правильность ответа выбрасыванием девяток:



6 плюс 3 в множителе 63 равно 9, которое вычеркивается, оставляя после себя 0.

В ответе 3 + 6 = 9 и 2 + 7 = 9, то есть вычеркиваются все цифры. 7, умноженное на 0, дает 0, так что ответ верен.

Предлагаю ряд примеров для самостоятельного решения. Попробуйте решить в уме столько примеров, сколько сможете.

а) 46 x 42 = __; б) 47 x 49 = __; в) 46 x 47 = __; г) 44 x 44 = __; д) 51 x 55 = __; е) 54 x 56 = __; ж) 51 x 68 = __; з) 51 x 72 = __

Ответы:

а) 1932; б) 2303; в) 2162; г) 1936; д) 2805; е) 3024; ж) 3468; з) 3672

Как вы справились с заданием? Если вы достаточно упражнялись до этого, то у вас не должно было возникнуть проблем с их решением в уме. Проверьте полученные ответы путем выбрасывания девяток.

Удвоение и деление пополам

Чтобы использовать 20 и 50 в качестве опорных чисел, необходимо уметь без проблем удваивать числа и делить их пополам.

Иногда, когда нам, например, приходится делить пополам двузначное число, у которого число десятков является нечетным, ответ не напрашивается сам собой. К примеру:

78: 2 =

Чтобы разделить пополам 78, вы могли бы 70 разделить на 2, потом 8, а затем сложить полученные результаты. Но есть способ еще проще.

78 = 80 — 2. Половина от 80 — 2 равняется 40 — 1. Это и есть ответ:

40 — 1 = 39

Чтобы удвоить 38, мысленно представьте это число в виде 40 — 2. Удвоенная величина будет 80 — 4, то есть 76.

Попробуйте сами решить следующие примеры:

а) 38 х 2 = __; б) 29 х 2 = __; в) 59 х 2 = __; г) 68 х 2 = __; д) 39 х 2 = __; е) 47 х 2 =

Ответы:

а) 76; б) 58; в) 118; г) 136; д) 78; е) 94

А теперь решите такие примеры:

а) 38: 2 = __; б) 56: 2 = __; в) 78: 2 = __; г) 94: 2 = __; д) 34: 2 = __; е) 58: 2 = __; ж) 18: 2 = __; з) 76: 2 = __

Ответы:

а) 19; б) 28; в) 39; г) 47; д) 17; е) 29; ж) 9 з) 38

Этот же подход может быть использован для умножения и деления довольно больших чисел на 3 и 4. К примеру:

19 х 3 = (20 — 1) х 3 = 60 — 3 = 57

38 х 4 = (40 — 2) х 4 = 160 — 8 = 152

Числа 200 и 500 в качестве опорных

Если перемножаемые числа близки либо к 200, либо к 500, вычисления не представляют особого труда, поскольку и 200, и 500 легко использовать в качестве опорных чисел.

Как, например, нам найти произведение 216 х 216? Если использовать 200 в качестве опорного, пример решается легко, в том числе и в уме:

$$\overset{16}{\underset{200}{\bigcirc}} \quad 216 \overset{16}{\times} 216 =$$

$$216 + 16 = 232$$

$$232 \times 200 = 46400$$

$$(232 \times 2 = 464,\ 464 \times 100 = 46400)$$

$$16 \overset{16}{\times} 16 =$$

Вычисляем 16 х 16, взяв 10 в качестве опорного числа.

$$\overset{6}{\underset{10}{\bigcirc}} \quad 16 \overset{6}{\times} 16 = 256$$

$$46400 + 256 = 46656 \text{ ОТВЕТ}$$

А как насчет 512 х 512?

$$\overset{12}{\underset{500}{\bigcirc}} \quad 512 \overset{12}{\times} 512 =$$

$$512 + 12 = 524$$

512 х 500 равно произведению 524 х 1000, деленному на 2.

524 х **1000** = **524000**, или 524 тысячи.

Половина от 524 тысяч равняется 262 тысячам.

Для деления 524 тысяч пополам можно разбить его на 500 тысяч и 24 тысячи. Половину обоих чисел легко вычислить в уме. Половина от 500 тысяч равна 250 тысячам. Половина от 24 тысяч равна 12 тысячам. 250 тысяч плюс 12 тысяч дает 262 тысячи.

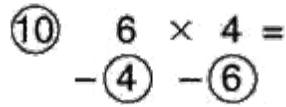
Теперь перемножим числа в кружках:

12 х **12** = **144**

262000 + **144** = **262144 ОТВЕТ**

Умножение меньших чисел

Попробуем найти произведение 6 х 4:



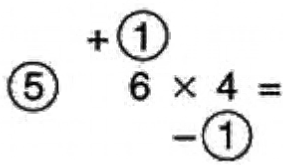
Мы используем в качестве опорного число 10. Кружки рисуем ниже множителей, потому что и 6, и 4 меньше 10. Вычитаем накрест:

6 – 6 = 0 или **4 – 4 = 0**

Теперь перемножим числа в кружках:

4 x **6** =

Мы вернулись к исходной задаче (6 x 4). Метод как будто бы ничем нам не помог. Можно ли заставить его работать и для таких случаев? Можно, но для этого необходимо использовать другое опорное число. Попробуем взять в качестве такового число 5. 5 — это 10, деленное на 2, или половина 10. Умножение на 5 проще всего производить путем умножения на 10 и деления результата на 2.



6 больше 5, поэтому для него рисуем кружок выше. 4 меньше 5, поэтому для него кружок рисуется ниже. 6 больше 5 на 1, как и 4 меньше 5 на 1, поэтому вписываем 1 в каждый из кружков.

Накрест складываем 4 и 1 или вычитаем 1 из 6:

6 – 1 = 5 или **4 + 1 = 5**

Умножаем 5 на опорное число, которое тоже равно 5.

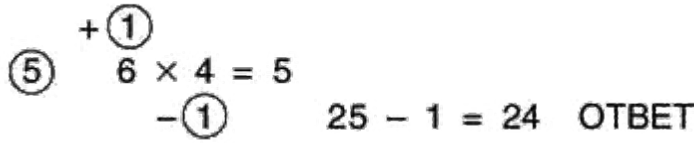
Для этого умножаем сначала на 10, что дает нам 50, а затем делим результат на 2, получая 25. Теперь перемножаем числа в кружках:

1 x **-1 = -1**

Поскольку результат является отрицательным числом, мы вычитаем его из промежуточного ответа, а не прибавляем к нему:

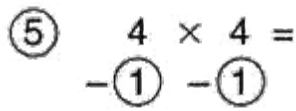
25 — 1 = 24

Таким образом:



Это очень длинный и громоздкий способ перемножения небольших чисел, но он показывает, что данный метод можно заставить работать во всех случаях, проявив немного изобретательности. Более того, подобные подходы помогают развить способность к латеральному мышлению, которое очень важно для математика и вообще для любого человека, если он желает добиться в жизни успеха.

Разберем еще один пример, даже если вы хорошо знаете таблицу умножения:



Вычитаем накрест:

4 – 1 = 3

Умножим результат на опорное число:

3 x **10 = 30**

30: 2 = 15

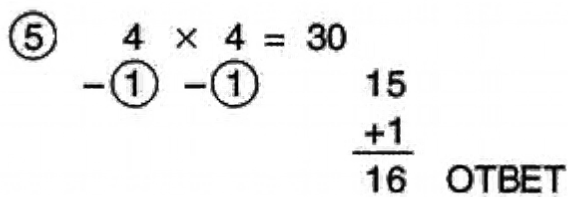
Теперь перемножим числа в кружках:

1 x **1 = 1**

Прибавим этот результат к промежуточному ответу:

15 + 1 = 16

Таким образом:



Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 3 x 4 = _; б) 3 x 3 = _; в) 6 x 6 = _; г) 3 x 6 = _; д) 3 x 7 = _; е) 4 x 7 = _

Ответы:

а) 12; б) 9; в) 36; г) 18; д) 21; е) 28

Уверен, что решение данных примеров не представило для вас ни малейших проблем. Я не считаю, что это наилучший

способ выучить таблицу умножения для малых чисел. Думаю, что проще всего — это выучить ее. Но некоторые люди желают знать, как перемножать небольшие числа с помощью данного метода, чтобы проверить его универсальность. Другим это может понравиться потому, что они будут уверены, что, даже если они и забудут таблицу умножения, существует простой способ вычислить требуемое произведение. Кроме того, даже если вы знаете таблицу умножения наизусть, иногда бывает полезным и занимательным поиграть в подобные игры и поэкспериментировать с числами.

Умножение на 5

Как мы видели, чтобы умножить на 5, можно умножить сначала на 10, а потом результат поделить пополам. 5 равно половине от 10. Чтобы умножить 6 на 5, можно умножить 6 на 10, что даст 60, а затем разделить результат пополам, получая в ответе 30.

Попробуйте самостоятельно:

а) 8 х 5 = _; б) 4 х 5 = _; в) 2 х 5 = _; г) 6 х 5 = _

Ответы:

а) 40; б) 20; в) 10; г) 30

А вот как следует поступать, когда число десятков нечетное. Умножим 7 на 5:

7 х **10** = **70**

Если вам трудно сходу разделить 70 пополам, представьте его как сумму: 60 + 10. Ее половина равна 30 + 5, что составляет 35.

Рассмотрим еще один пример:

9 х **5** =

9 умножить на 10 равно 90. 90 можно представить как 80 + 10. Половина от 80 + 10 равна 40 + 5, так что ответ — 45. Решите самостоятельно:

а) 3 х 5 = _; б) 5 х 5 = _; в) 9 х 5 = _; г) 7 х 5 = _;

Ответы:

а) 15; б) 25; в) 45; г) 35

Это простой способ усвоения таблицы умножения для числа 5. И он работает для любых чисел, умножаемых на 5. Например:

14 х **5** =

14 х **10** = **140**, а 140 при делении на 2 дает 70.

Аналогичным образом:

23 x **5** =

23 x **10** = **230**

230 = **220** + **10**

Половина от 220 + 10 равна 110 + 5

110 + **5** = **115**

Все эти вычисления гораздо быстрее выполняются в уме после некоторой тренировки.

Глава 6
Произведение десятичных дробей

Числа состоят из цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Цифры подобны буквам, из которых мы составляем слова. 23 — это двузначное число, состоящее из цифр 2 и 3. Положение цифры в числе определяет разряд, соответствующий этой цифре. Например, цифра 2 в числе 23 соответствует разряду десятков и обозначает 2 десятка, а цифра 3 — разряду единиц и обозначает 3 единицы. 435 — это трехзначное число. Цифра 4 соответствует разряду сотен и обозначает 4 сотни, или 400. Цифра 3 соответствует числу десятков и обозначает 3 десятка, или 30. Цифра 5 соответствует числу единиц и обозначает 5 единиц, или просто 5. Когда мы записываем число, порядок, в котором в нем расположены цифры, имеет немаловажное значение.

Когда мы записываем цену, или число, соответствующее количеству денег, мы используем десятичную запятую, чтобы отделить доллары от центов. Например, 1,25 доллара обозначает 1 доллар и 25 сотых доллара (25 центов). Первая цифра после запятой обозначает десятые доллара (10 монет по 10 центов составляют 1 доллар). Вторая цифра после запятой обозначает сотые доллара (100 центов составляют 1 доллар).

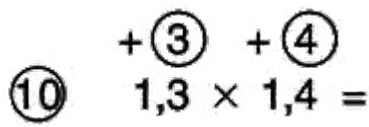
Перемножение десятичных дробей[2] не более сложная операция, чем перемножение любых других чисел. Рассмотрим на примерах.

Например:

1,3 x **1,4** =

(1,3 — одна целая и три десятых; 1,4 — одна целая и четыре десятых.)

Записываем пример как есть, однако не обращаем внимания на запятые:



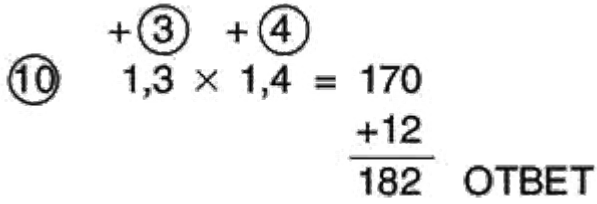
Хотя мы и записали 1,3 x 1,4, пример будем решать так, будто он выглядит следующим образом:

13 x **14** =

Забудьте про запятую и скажите про себя: «Тринадцать плюс четыре равно семнадцать, умножим на десять, сто семьдесят.

Четырежды три — двенадцать. плюс сто семьдесят. сто восемьдесят два».

Решение примера выглядит так:



Однако нашим искомым произведением являлось 1,3 х 1,4, а мы пока вычислили только 13 х 14. Пример решен не до конца. Нам необходимо выяснить, где расположить десятичную запятую в полученном ответе. Чтобы это сделать, посмотрим на множители и отсчитаем количество цифр после запятой. Имеются две цифры после запятой: 3 в числе 1,3 и 4 в числе 1,4. Поскольку имеем в сумме две цифры после запятой в множителях, в ответе также должно быть две цифры после запятой. Отсчитываем две цифры с конца и ставим запятую между цифрами 1 и 8.

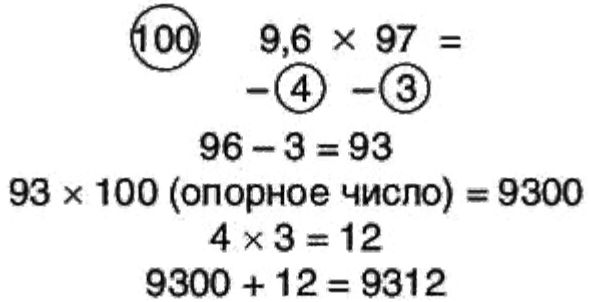
1,82 ОТВЕТ

Простым способом проверки полученного ответа является оценка приближением. Это означает, что вместо того, чтобы использовать исходные числа (1,3 и 1,4), мы округлим их до 1 и 1,5 соответственно. Произведение 1 х 1,5 дает 1,5. Таким образом, искомый ответ должен находиться где-то между 1 и 2, а не, скажем, 20 или 200. Это дает нам понять, что мы правильно определили место десятичной запятой.

Попробуем решить такой пример:

9,6 х **97** =

Запишем задачу так, как она поставлена, однако будем считать, что речь идет о числах 96 и 97.



Где нам поставить десятичную запятую? Сколько всего цифр

после запятой имеется в множителях примера? Одна. Столько же цифр после запятой должно быть и в ответе.

931,2 ОТВЕТ

Для того чтобы определить, где поставить десятичную запятую, мы должны подсчитать общее количество цифр после запятой у обоих чисел, которые мы перемножаем. Не забудьте проследить, чтобы такое же число цифр после запятой было и в ответе. Можно дополнительно проверить ответ, умножив 10 (округленное значение числа 9,6 в сторону увеличения) на 90 (округленное значение числа 97 в сторону уменьшения), что дает 900. Теперь мы знаем, что ответ должен быть где-то в районе числа 900, а не 9000 или 90.

Если бы требовалось перемножить 9,6 и 9,7, мы получили бы в ответе 93,12. Данный факт может помочь нам найти пути еще большего упрощения вычислений, которые иначе были бы не так очевидны. Мы скоро рассмотрим эти возможности. А сейчас попробуйте решить самостоятельно следующие примеры:

а) 1,3 х 1,3 = _; б) 1,4 х 1,4 = _; в) 14 х 0,14 = _; г) 96 х 0,97 = _; д) 0,96 х 9,6 = _; е) 13 х 1,5 = _

Ответы:

а) 1,69; б)1,96; в) 1,96; г) 93,12; д) 9,216; е) 19,5

Предположим, что вам надо было бы решить следующий пример:

0,13 х **0,14** =

Вспомним, что:

13 х **14** = **182**

Где нам поставить запятую? Сколько всего цифр после запятой у обоих множителей? Четыре: цифры 1 и 3 в первом множителе и цифры 1 и 4 во втором. Стало быть, необходимо отсчитать четыре цифры в ответе, начиная с конца. Нам придется добавить одну цифру, поскольку у нас получился трехзначный ответ (182). Поэтому отсчитываем три цифры и добавляем 0.

Наш ответ теперь выглядит следующим образом:

0,0182 ОТВЕТ

Нам также необходимо поставить 0 и перед запятой, поскольку перед ней всегда должна стоять хотя бы одна цифра. В нашем случае мы добавляем 0 в качестве четвертой цифры после запятой, а также ставим 0 перед запятой.

Рассмотрим еще один пример, чтобы закрепить усвоенное:

0,014 х **1,4** =

14 х **14** = **196**

Где должна стоять запятая? У множителей в сумме четыре цифры после запятой, а именно: 0, 1 и 4 — у первого множителя и 4 — у второго. Поэтому и в ответе после запятой должны стоять

четыре цифры. Поскольку цифр в ответе всего три, мы добавляем 0 в качестве четвертой цифры после запятой.

Ответ таков:

0,0196 ОТВЕТ

Решите следующие примеры самостоятельно:

а) 23 х 2,4 = _; б) 0,48 х 4,8 = _; в) 0,048 х 0,48 = _; г) 0,0023 х 0,23 = _

Легко, не так ли?

А вот ответы для контроля:

а) 55,2; б) 2,304; в) 0,02304; г) 0,000529

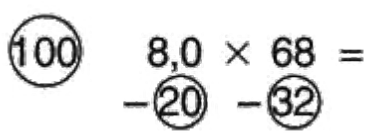
Знание этого простого принципа поможет нам решить некоторые задачи, которые могут показаться трудными, если применить к ним изученный нами метод. После некоторой модификации условия задачи можно значительно упростить решение. Рассмотрим пример:

8 х **68** =

Какое опорное число нам использовать в данном случае? Можно было бы взять 10 в качестве опорного для множителя 8, но для 68 лучше взять 100, поскольку эти числа ближе друг к другу. Может быть, попробовать 50? Однако наш метод работает лучше, когда числа расположены недалеко друг от друга. В таком случае как нам решать задачу? А почему не написать 8,0 вместо 8?

Между 8 и 8,0 нет никакой разницы. Первое число (8) означает, что мы имеем 8 единиц, а второе (8,0) — что у нас есть 8 единиц с точностью до одного десятичного знака. Однако этот знак, будучи нулевым, ничего ни прибавляет, ни убавляет от целой части (8).

Итак, мы получили:



Теперь задача решается легко. Вычитаем накрест:

68 – 20 = 48

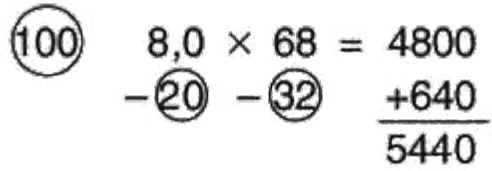
Умножаем 48 на опорное число 100 и получаем 4800. Перемножим числа в кружках.

20 х **32** = **640**

(Чтобы умножить на 20, умножаем сначала на 2, а затем на 10, поскольку 2 х 10 = 20.)

4800 + 640 = 5440

Таким образом:



Теперь необходимо правильно расположить десятичную запятую. Сколько цифр после запятой в множителях в условии задачи? Одна, тот нуль, что мы прибавили сами. Таким образом, мы отсчитываем одну цифру справа в ответе.

544,0 ОТВЕТ

Подобное число мы обычно записываем без нуля после запятой, то есть 544.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 9 х 83 = _; б) 9 х 67 = _; в) 9 х 77 = _; г) 8 х 86 = _; д) 7 х 89 = _

Вот ответы для контроля:

а) 747; б) 603; в) 693; г) 688; д) 623

Решение примеров не составило труда, не так ли?

Применив немного воображения, вы сможете использовать данные подходы для решения любой задачи на умножение.

Глава 7
Умножение с помощью двух опорных чисел

Наш метод умножения прекрасно работал для чисел, которые не очень сильно разнятся между собой по величине. В противном случае метод также работает, но вычисления будут более громоздкими. Например, что, если бы мы захотели вычислить, сколько будет 13 x 64? Какое опорное число нам выбрать? В настоящей главе мы рассмотрим простой метод, позволяющий следовать прежней стратегии, но с использованием двух опорных чисел.

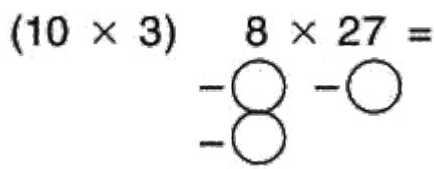
Можно перемножить два числа, которые сильно разнятся между собой по величине, с помощью двух опорных чисел. Давайте сначала рассмотрим суть вопроса, а затем я покажу, как работает метод. Возьмем произведение 8 x 27 в качестве примера. 8 ближе к 10, поэтому используем 10 в качестве первого опорного числа. 27 ближе к 30, поэтому

30 будет нашим вторым опорным числом. Из данных чисел выберем то, на которое легче всего умножать. Поскольку очень легко умножать на 10, выберем его. Оно будет нашим основным опорным числом. Второе опорное число должно быть кратным основному. Число, которое мы выбрали, является кратным основному, превышая его в три раза (30: 10 = 3). Вместо того чтобы рисовать кружок, я записываю два опорных числа в скобках слева от условия примера.

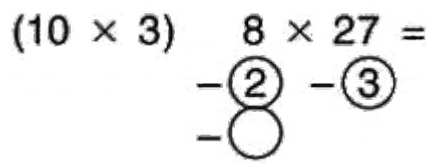
Основным опорным числом является 10. Второе опорное число — это 30, или 3 x 10. Мы записываем опорные числа в скобках в виде второго числа, выраженного через первое, то есть:

(**10** x **3**) **8** x **27** =

Оба множителя в примере меньше своих опорных чисел, поэтому рисуем кружки под множителями. Под цифрой 8, опорным числом которой является 10, нарисуем еще один кружок.



На сколько 8 и 27 меньше своих опорных чисел (не забывайте, что 3 представляет 30)? На 2 и 3. Вписываем 2 и 3 в кружки.



Теперь умножим 2, расположенное под множителем 8, на множитель 3 в скобках.

2 x **3** = **6**

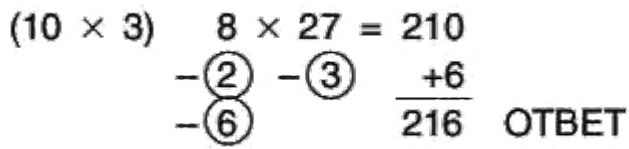
Впишем 6 в самый нижний кружок, под 2. Теперь вычтем число в самом нижнем кружке накрест из 27:

27 — 6 = 21

Умножим 21 на основное опорное число 10:

21 x **10** = **210**

210 является нашим промежуточным ответом. Чтобы получить остальную его часть, перемножим числа в верхних кружках (2 и 3), что даст нам 6. Прибавим 6 к 210 и получим окончательный ответ: 216.



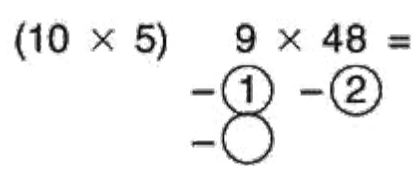
Решим другой пример:

9 x **48** =

Какие опорные числа нам следует выбрать? 10 и 50. Запишем пример по-новому:

(**10** x **5**) **9** x **48** =

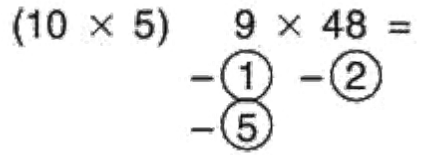
Оба множителя меньше своих опорных чисел, поэтому располагаем кружки внизу. На сколько они меньше своих опорных чисел? На 1 и 2. Вписываем 1 и 2 в кружки:



Теперь умножим 1 под 9 на множитель 5, который в скобках.

1 x **5** = 5

Записываем 5 в самый нижний кружок, под 1. Решение нашего примера теперь выглядит следующим образом:



Вычтем 5 из 48:

48 — 5 = 43

Запишем 43 после знака равенства. Умножим 43 на опорное число 10 (для этого просто припишем 0 справа к 43), что и даст ответ.

43 x 10 = 430

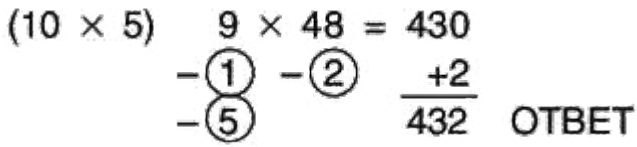
В качестве последнего шага перемножим числа в двух верхних кружках:

1 x 2 = 2

Прибавим 2 к промежуточному ответу 430:

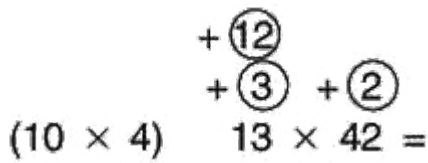
430 + 2 = 432

Полностью решенный пример теперь выглядит так:



Просто, не так ли? Единственная трудность, с которой вы можете столкнуться, состоит в том, чтобы вспомнить, каким должен быть следующий шаг.

Если множители больше опорных чисел, тогда мы поступаем следующим образом. Возьмем в качестве примера произведение 13 x 42:



Основным опорным числом является 10. Вторым мы взяли 40, или 10 x 4. Стараемся подобрать опорные числа так, чтобы они были либо меньше, либо больше перемножаемых чисел. Оба множителя в рассматриваемом примере больше соответствующих опорных чисел, поэтому мы нарисовали кружки сверху.

Множителю 13 соответствует основное опорное число 10, поэтому мы рисуем над этим множителем два кружка. На сколько больше своих опорных чисел 13 и 42? На 3 и 2. Вписываем 3 и 2 в нижние кружки. Умножаем 3 в кружке над множителем 13 на 4 в скобках.

3 x 4 = 12

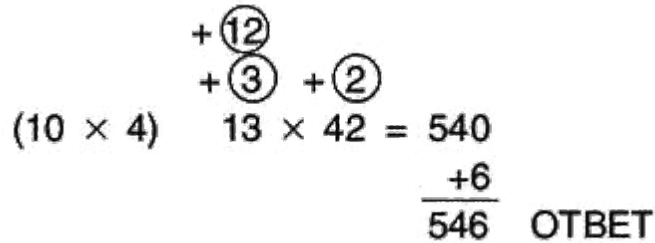
Записываем 12 в верхний кружок над 13. Теперь складываем накрест.

42 + 12 = 54

Произведение 54 на опорное число 10 дает 540. Это наш промежуточный ответ. Теперь перемножим числа в нижних кружках.

3 x 2 = 6

Прибавим 6 к 540, чтобы получить окончательный ответ: 546. Так выглядит полностью решенный пример:

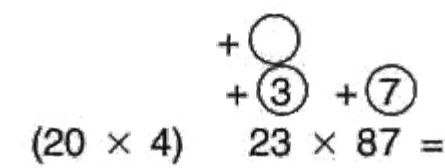


Основным опорным числом необязательно должно быть 10. Чтобы найти произведение 23 x 87, разумнее использовать 20 в качестве основного опорного числа, а 80 (20 x 4) — в качестве второго опорного.

Давайте закрепим усвоенное на примере:

(**20** x **4**) **23** x **87** =

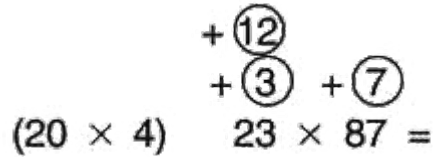
Оба множителя в примере больше, чем их опорные числа (20 и 80), поэтому рисуем кружки вверху. На сколько больше? На 3 и 7. Вписываем 3 и 7 в соответствующие кружки.



Умножаем 3, которое над множителем 23, на 4 в скобках.

3 x 4 = 12

Вписываем 12 в верхний кружок, над 3. Проделанная вами работа теперь выглядит так:



Теперь сложим 12 и 87.

87 + 12 = 99

Умножаем 99 на основное опорное число 20:

99 x 20 = 1980

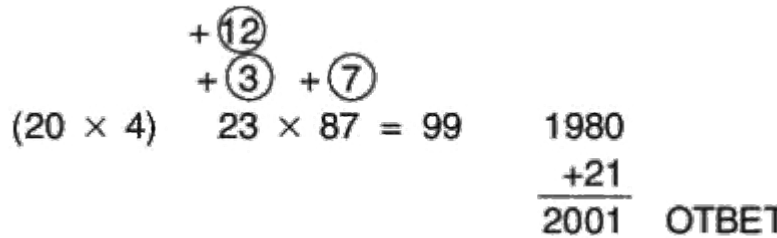
(Умножаем 99 сначала на 2, а полученный результат — на 10. 99 — это 100 минус 1. 2 умножить на 100 минус 1 дает 200 минус 2, а это равно 198. Теперь умножим 198 на 10 и получим ответ для произведения 99 x 20.)

Теперь перемножим числа в нижних кружках.

3 x 7 = 21

1980 + 21 = 2001

Окончательное решение примера выглядит так:



Предлагаю три примера для самостоятельного решения:

а) 14 x 61 = _; б) 96 x 389 = _; в) 8 x 136 = _

Чтобы вычислить произведение 8 x 136, используйте числа 10 и 140 (10 x 14) в качестве опорных.

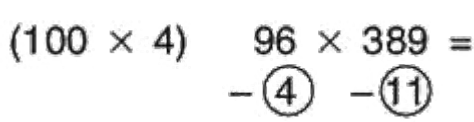
Ответы:

а) 854; б) 37344;в) 1088

Давайте решим примеры б) и в) вместе:

б) 96 x 389 =

Будем использовать 100 и 400 в качестве опорных чисел:

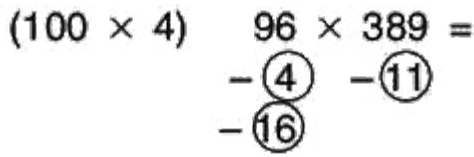


Умножаем 4 в кружке под множителем 96 на 4 в скобках:

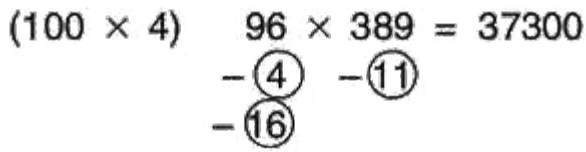
4 x 4 = 16

Вписываем 16 в нижний кружок, под 4. Решение пока

выглядит следующим образом:

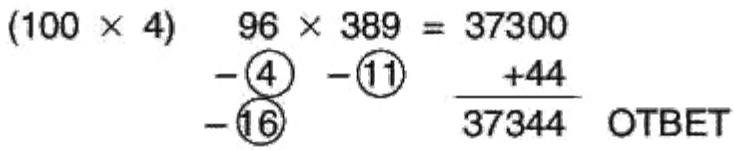


Вычтем 16 из 389 и получим 373. Далее умножим 373 на основное опорное число 100, это даст нам 37300.



Теперь перемножим 4 и 11 в кружках, в результате чего получим 44. Сумма 44 и 37300 дает 37344.

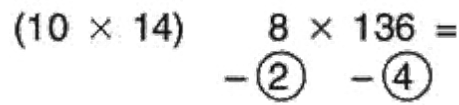
Полностью решенный пример выглядит так:



Теперь попробуем решить пример в):

8 x **136** =

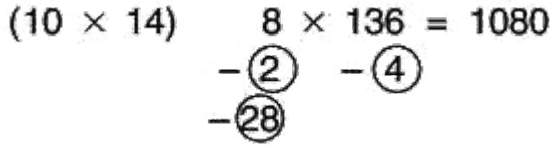
Возьмем 10 и 140 (10 x 14) в качестве опорных чисел:



Умножим 2 под множителем 8 на число 14, которое в скобках:

2 x **14** = 28

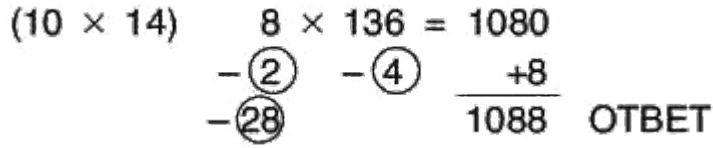
Записываем 28 в нижний кружок, под 2. Теперь вычтем 28 из 136 (сначала отнимаем 30, а затем еще 2) и получаем 108. Умножаем теперь 108 на основное опорное число 10, получая в ответе 1080. Проделанная до сих пор работа выглядит следующим образом:



Теперь перемножим числа 2 и 4 в кружках.

2 x **4** = **8**

Прибавим 8 к 1080 и получим окончательный ответ: 1088.



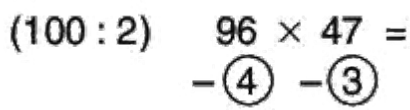
Опорные числа, выраженные как одно число, деленное на другое

Чтобы умножить 96 на 47, мы могли бы использовать в качестве опорных числа 50 или 100: 50 x 2 или 100: 2. В данном случае 100: 2 было бы лучше, поскольку 100 тогда станет основным опорным числом. На 100 умножать легче, чем на 50. Обратите внимание, что, записывая пример для решения, лучше указывать первым тот множитель, который относится к основному опорному числу.

Итак, приступим к решению:

96 x **47** =

Возьмем 100 и 50 в качестве опорных чисел:



Разделим число 4, находящееся в кружке под множителем 96, на делитель 2 в скобках:

4: **2** = **2**

Полученный ответ 2 запишем в еще один кружок под 96.

Теперь вычтем 2 из 47 и умножим ответ (45) на основное опорное число (100). В результате получаем 4500:

(100 : 2) 96 × 47 = 4500
−④ −③
−②

Далее умножим первые две цифры в кружках (—4 х — 3 = 12) и прибавим полученный результат к 4500. В итоге получаем 4512:

(100 : 2) 96 × 47 = 4500
−④ −③ +12
−② 4512 ОТВЕТ

Если бы вы перемножали 96 и 23, можно было бы использовать 100 в качестве основного опорного числа, а 25 (100: 4) — в качестве второго опорного. Это выглядело бы так:

(100 : 4) 96 × 23 =
−④ −②

96 на 4 меньше 100, а 23 на 2 меньше 25. Теперь разделим 4 под 96 на 4 в скобках. 4, деленное на 4, дает 1. Впишем это число в еще один кружок под 96:

(100 : 4) 96 × 23 =
−④ −②
−①

Вычтем 1 из 23, получив в ответе 22. Умножим 22 на основное опорное число 100 и получим 2200.

(100 : 4) 96 × 23 = 2200
−④ −②
−①

Перемножим числа в двух верхних кружках.
4 х **2** = **8**

Прибавим 8 к 2200 и получим окончательный ответ: 2208.

$$(100:4)\quad 96\times 23=2200$$
$$-\textcircled{4}\quad -\textcircled{2}\qquad +8$$
$$-\textcircled{1}\qquad\qquad 2208\quad \text{ОТВЕТ}$$

А если бы нам надо было перемножить 97 и 23? Применима ли наша стратегия в данном случае? Давайте попробуем:

$$(100:4)\quad 97\times 23=$$
$$-\textcircled{3}\quad -\textcircled{2}$$
$$-\textcircled{\tfrac{3}{4}}$$

3, деленное на 4, — это $^3/_4$. Вычтем $^3/_4$ из 23 (надо отнять 1 и прибавить $^1/_4$):

$23 - {}^3/_4 = 22{}^1/_4$

Одна четверть в виде десятичной дроби записывается как 0,25 ($^1/_4$ от 100 равна 25). Таким образом:

$22{}^1/_4$ x 100 = 2225

Перемножим числа в кружках.

$$3\times 2=6$$
$$2225+6=2231$$
$$(100:4)\quad 97\times 23=2225$$
$$-\textcircled{3}\quad -\textcircled{2}\qquad +6$$
$$-\textcircled{\tfrac{3}{4}}\qquad\qquad 2231\quad \text{ОТВЕТ}$$

Таким образом, наш метод работает одинаково хорошо и в таких случаях.

А как насчет 88 x 343? Можно использовать в качестве опорных чисел 100 и 350.

$$(100:3\tfrac{1}{2})\quad 88\times 343=$$
$$-\textcircled{12}\quad -\textcircled{7}$$
$$-\textcircled{42}$$

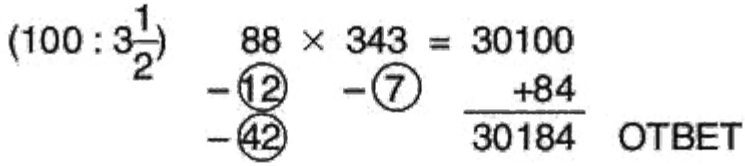
Чтобы найти произведение $3^1/_2$ x 12, умножьте 12 на 3, а затем прибавьте к ответу половину от 12, то есть 6. У вас получится 42.

343 — 42 = 301

301 x 100 (основное опорное число) = 30100

12 x 7 = 84

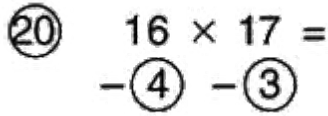
30100 + 84 = 30184



Почему работает данный метод?

Подробное объяснение я давать не буду, а попробую показать на примере. Рассмотрим произведение 8 x 17.

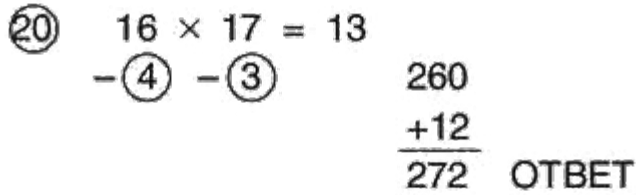
Мы могли бы удвоить 8, чтобы получить 16, затем умножить 16 на 17 и взять половину ответа, который и будет правильным для исходной задачи. Это довольно длинный путь, однако он показывает, почему метод с использованием двух опорных чисел работает. Будем использовать 20 в качестве опорного числа.



Вычтем 4 из 17 и получим 13. Умножив 13 на опорное число 20, получим в ответе 260. Теперь перемножим числа в кружках:

4 x 3 = 12

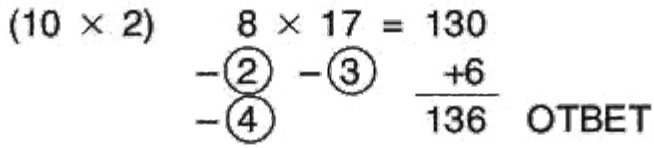
Прибавив 12 к промежуточному ответу 260, получим окончательный результат: 272. Но мы ведь умножали на 16 вместо 8, поэтому на самом деле удвоили ответ. 272, деленное на 2, дает нам ответ для примера 8 x 17, а именно 136.



Половина от 272 равна 136. Таким образом:

8 x 17 = 136

Итак, мы удвоили множитель в самом начале, а затем уменьшили ответ вдвое в самом конце. Эти две операции взаимно гасят друг друга. При этом можно избавиться от значительной части вычислений. Посмотрим, как в данном случае работает метод двух опорных чисел:



Обратите внимание, что мы вычитаем 4 из 17 во втором способе решения; то же самое мы сделали, когда решали по первому способу. В результате мы получили 13, которое затем умножили на 10. Решая первым способом, мы удвоили 13 перед тем, как умножать его на 10, а затем уменьшили в два раза ответ в конце. Решая вторым способом, мы перемножили числа в кружках (2 и 3), что дало в ответе 6, то есть половину от 12, полученного при решении первым способом.

Можно использовать любую комбинацию опорных чисел. Общие правила таковы:

• Прежде всего на роль опорных чисел надо подбирать те, на которые легко умножать, то есть 10, 20, 50 и т. д.

• Второе опорное число должно являться кратным основному, то есть превышать его вдвое, втрое, вчетверо и т. д.

Поэкспериментируйте с предложенными способами решений самостоятельно. Всегда имеется возможность как-то упростить математические вычисления. И всякий раз, используя данные методы, вы совершенствуете свои математические навыки.

Глава 8
Сложение

Большинство из нас считает сложение более легкой операцией, чем вычитание. В настоящей главе мы узнаем, как сделать сложение еще проще.

Как бы вы складывали 43 и 9 в уме?

Легче всего было бы прибавить сначала 10, получив 53, и затем отнять 1. Ответом является 52.

Легко прибавлять 10 к любому числу: 36 плюс 10 равно 46; 34 плюс 10 равно 44 и т. д. Просто увеличивайте число десятков на 1 всякий раз, когда к числу прибавляется 10 (подробнее см. главу 6).

Основное правило для выполнения сложения в уме звучит так:

> Чтобы прибавить к числу 9, прибавьте к нему 10 и отнимите 1; чтобы прибавить 8, прибавьте 10 и отнимите 2; чтобы прибавить 7, прибавьте 10 и отнимите 3 и т. д.

Если к числу надо прибавить 47, прибавьте к нему 50 и отнимите 3. Чтобы прибавить 196, прибавьте 200 и отнимите 4. Это позволяет удерживать числа в уме. Чтобы прибавить 38 к числу, прибавьте 40 и отнимите 2. Чтобы прибавить 288 к числу, прибавьте 300, а затем отнимите от результата 12.

Попробуйте выполнить сложение в уме. Произнесите вслух ответ. Для 34 + 9 не говорите: «Сорок четыре, сорок три». Сделайте поправку на единицу, уже произнося ответ, чтобы у вас просто получилось: «Сорок три». Попробуйте решить приведенные ниже примеры. Для двух из них предлагается подсказка.

а) 56 + 8 = (−②) б) 38 + 9 = в) 76 + 9 =

г) 65 + 9 = (−①) д) 47 + 8 = е) 26 + 7 =

Ответы:

а) 64; б) 47; в) 85; г) 74; д) 55; е) 33

Сложение в уме двузначных чисел

А как бы вы прибавляли 38 к числу? Чтобы прибавить 38, надо сначала к числу прибавить 40, а затем вычесть 2 из полученной суммы.

А как насчет 57? Прибавляем 60 и вычитаем 3.

Как прибавить 86? Прибавляем 100 и вычитаем 14.

Есть простое правило для прибавления одного числа к другому в уме:

> Если цифра единиц в прибавляемом числе больше 5, то число необходимо округлить в сторону увеличения, а затем вычесть ошибку округления из полученной суммы. Если же цифра единиц меньше, то прибавляем сначала десятки, а потом единицы.

Находя сумму двузначных чисел в уме, сначала складывайте цифры, обозначающие десятки в обоих числах, и только потом единицы. Если же цифра единиц у прибавляемого числа больше или равна 5, округляем его в сторону увеличения, вычисляем сумму, а затем вычитаем из результата разницу между округленным значением и исходным числом. Например, прибавляя 47, прибавляйте 50, а затем вычитайте 3 из результата.

Чтобы сложить 35, 67 и 43, начинаем с 35, к которому прибавляем 70, что дает нам 105, вычитаем 3 (получается 102), прибавляем 40 (в сумме 142), а затем еще 3 (число единиц), получая окончательный ответ 145.

Немного попрактиковавшись, вы сможете убедиться, что в состоянии удерживать складываемые числа в уме.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 34 + 48 = _; б) 62 + 26 = _; в) 82 + 39 = _; г) 27 + 31 = _; д) 33 + 44 = _; е) 84 + 76 = _; ж) 44 + 37 = _

Ответы:

а) 82; б) 88; в) 121; г) 58; д) 77; е) 160; ж) 81

В последнем примере вы могли заметить, что 37 на 3 меньше, чем 40, поэтому можно прибавить 40, а затем вычесть 3. Или же можно было сначала вычесть 3 из 44, получив 41, перед тем как прибавлять 40, что даст в ответе те же 81. Решая подобные задачи в уме, со временем вы обнаружите, что они совсем нетрудные, и начнете находить способы для еще большего упрощения счета.

Сложение трехзначных чисел

Чтобы найти сумму трехзначных чисел, используем тот же метод.

Складывая 355, 752 и 694, можно было бы по ходу решения проговаривать про себя следующим образом: «Триста пятьдесят пять плюс семьсот (тысяча пятьдесят пять), плюс пятьдесят (тысяча сто пять), плюс два (тысяча сто семь), плюс семьсот без шести, тысяча восемьсот один». Вы могли бы также предпочесть складывать слева направо, то есть сначала сотни, потом десятки, а затем единицы.

Немного попрактиковавшись, вы начнете решать подобные задачи в уме без особых проблем.

Вот несколько примеров:

а) 359 + 523 = _; б) 123 + 458 = _; в) 456 + 298 = _; г) 345 + 288 = _

Ответы:

а) 882; б) 581; в) 754; г) 633

В случае а) можно округлить 359 до 360. 523 плюс 300 дает 823, плюс 60 — 883, минус 1 — 882. Или же в таком порядке: 360 плюс 500 равно 860, плюс 23 — 883, минус 1 — 882. Решение обоих вариантов не составляет труда.

С примером в) у вас также не должно быть никаких проблем. Можно округлить 298 до 300.

456 + 300 = 756

756 — 2 = 754

Сложение чисел в уме занимает меньше времени, чем поиск бумаги и ручки или использование калькулятора, который сначала нужно достать из сумки, кармана или ящика стола.

Сложение денежных величин

Чтобы сложить 4,95, 6,95 и 13,95 доллара, вам достаточно сложить 5 + 7 + 14 долларов и вычесть 15 центов из полученной суммы. Сначала складывайте десятки, затем единицы, получая последовательно 12, 22 и 26.

5 + 7 = 12

12 + 14 = 26

Промежуточный ответ равен 26,00 доллара. Теперь вычтем 15 центов и получим окончательный ответ: 25,85 доллара.

Допустим, нам нужно сложить следующие числа:

495

695
+ 1395
——

В этом случае ответ менее очевиден. Вместе с тем это одна и та же задача. Мы могли бы всегда использовать такой подход для сложения денежных величин (хотя не многие так делают), но просто нам бывает трудно воспринять это как абсолютно ту же задачу, только без десятичной запятой.

Если одно и то же число повторяется несколько раз в каком-нибудь вычислении, умножьте его на число раз, которое оно повторяется. Предположим, нам требуется сложить следующие числа:

119.95
59.95
119.95
119.95
14.95
+ 119,95
——

Это могут быть, например, цены на товары, предлагаемые в местном магазине. Как бы вы стали находить их сумму?

Во-первых, следует округлить каждую цену (число) из списка. 119,95 доллара следует округлять до 120 долларов, 59,95 — до 60, а 14,95 — до 15. Получив ответ, надо внести поправку на 5 столько раз, сколько мы производили округлений.

Во-вторых, поскольку цена 119,95 доллара встречается четыре раза, ее можно умножить на 4, а затем уже прибавлять к ответу другие величины. 120 долларов, умноженные на 4, дают 480 долларов. Теперь сложим 60 и 15 долларов. 480 плюс 60 дает 540, а 540 плюс 15 равно 555.

Теперь внесем поправку на 5 центов, которые мы добавляли, чтобы округлить каждую цену. Мы прибавляли 5 центов в шести случаях. Умножаем 5 центов на 6 и получаем 30 центов в качестве общей суммы центов, которые мы добавили в процессе вычисления. Вычтем эту величину, чтобы получить окончательный ответ.

555 долларов минус 30 центов равно 554,70 доллара (у вас забрали 1 доллар и вернули 70 центов).

Сложение больших чисел

Вот пример сложения в уме больших чисел:

8461
+ 5678
——

Начинаем с колонки, соответствующей разряду тысяч.

8 плюс 5 равно 13. Поскольку мы работаем в разряде тысяч, ответом служат 13 тысяч. Мы замечаем, что цифры в разряде сотен дают в сумме 10, то есть еще одну тысячу. Итак, пока итогом наших вычислений являются 14 тысяч.

Прибавим 61 от верхнего слагаемого. 14061.

Теперь прибавим 78.

На вашем месте я прибавил бы 80 и вычел 2. Для этого я прибавляю 100 и вычитаю 20. Итак, необходимо прибавить 100, вычесть 20 и затем еще 2.

14061 плюс 100 равно 14161, минус 20 — 14141, минус еще 2 — получаем 14139.

Другой метод заключается в том, чтобы к первому слагаемому прибавлять второе слагаемое по частям: сначала тысячи, потом сотни, затем десятки и наконец единицы.

Можно было бы решать в уме так: «Восемь тысяч четыреста шестьдесят один плюс пять тысяч, тринадцать тысяч четыреста шестьдесят один, плюс шестьсот равно четырнадцать тысяч шестьдесят один, плюс семьдесят восемь». Затем прибавляйте 78 так, как было описано выше.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно, выполняя сложение в направлении слева направо:

а) 3456
+ 3914
——

б) 9785
+ 1641
——

в) 4184
+ 1234
——

г) 2750
+ 5139
——

д) 2156
+ 2498
——

Ответы:

а) 7370; б) 11426; в) 5418; г) 7889; д) 4654

Предположим, нам нужно сложить следующие числа:

8
+ 4
——

Простой метод сложения этих чисел таков:

6 + 4 = 10, 10 + 8 = 18

Большинство из вас сочтет это более легким решением, чем 6 + 8 + 4 = 18 (6 плюс 8 равно 14, плюс еще 4 — будет 18). Поэтому простое правило звучит так:

> Складывая колонку чисел, сначала складывайте пары чисел, которые дают в сумме десять или число, кратное десяти, а уже потом прибавляйте другие числа.

Итак, всегда стремитесь сначала прибавить такое слагаемое, чтобы получить число, кратное десяти. То есть если вы достигли, скажем, в сумме 27 в процессе вычисления и следующими слагаемыми являются 8 и 3, прибавляйте сначала 3, а не 8, что даст вам 30, а потом уже прибавляйте 8, что даст вам 38. Как следует освоив изложенные здесь методы умножения, вы научитесь мгновенно распознавать числа, дающие в сумме 10 или число, кратное ему, так что вычисления станут почти автоматическими.

Проверка результата сложения путем выбрасывания девяток

Точно так же как мы выбрасываем девятки, чтобы проверить полученный ответ при умножении, можно применять тот же подход для проверки результата сложения или вычитания.

Рассмотрим пример:

1 2 3 4 5
6 7 8 9 0
4 2 7 3 5
+ 2 1 8 6 5
——

После выполненных вычислений мы получили в ответе

Верный ли это ответ?

Давайте это проверим путем выбрасывания девяток, или методом чисел-подстановок:

$$\begin{array}{r} 12345 \\ 67890 \\ 42735 \\ +21865 \\ \hline 144835 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 21 \\ \\ 13 \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$$

Подстановками в данном случае являются числа 6, 3, 3 и 4. 6 и 3 дают в сумме 9, их можно выбросить. Остаются 3 и 4. 3 + 4 = 7. 7 — это наше контрольное число или проверочный ответ.

Правильный ответ должен давать 7 по сумме цифр после выбрасывания девяток. Давайте проверим:

$$\cancel{1} + 4 + \cancel{4} + \cancel{8} + 3 + \cancel{5} = 7$$

Ответ верен.

Если бы приведенные выше числа являлись суммами денег с десятичной запятой, решение осталось бы неизменным. Можно использовать данный метод для проверки практически любых вычислений, что касается сложения, вычитания, умножения и деления.

Попробуйте самостоятельно. Проверьте, все ли полученные ответы в примерах, приведенных ниже, верны? Сделайте это путем выбрасывания девяток. Если обнаружили ошибку, исправьте ее и снова проверьте полученный ответ выбрасыванием девяток.

а)

12345
67890
2531
+ 72406

155172

б)

25137
15463
51684
+25170

17454

в)

58235
21704
+97105
___
177144

Глава 9
Вычитание

Большинство людей считают, что вычитать сложнее, чем складывать. Вовсе не обязательно. В настоящей главе мы познакомимся с подходами, которые сделают для вас вычитание пустяковым делом.

Прежде всего рассмотрим, как вычитать числа в уме.

Чтобы вычесть два числа в уме, попробуйте округлить вычитаемое, а затем подкорректируйте полученный ответ.

Чтобы вычесть 9, отнимите 10, а затем прибавьте к ответу 1; чтобы вычесть 8, отнимите 10 и прибавьте 2; чтобы вычесть 7, отнимите 10 и прибавьте 3. Например:

$$56 - 9 = \underset{\textcircled{1}}{}$$

Чтобы вычесть 9 из 56 в уме, самый простой способ сделать это — сначала вычесть 10 (получив в ответе 46), а затем прибавить 1 (47).

Вычитая 8 из 47, отнимите 10 (37) и прибавьте 2 (39).

Чтобы вычесть 38 из 54, отнимаем сначала 40 (что даст нам 14), а затем прибавляем 2, получив окончательный ответ 16.

На бумаге решение выглядело бы так:

$$54 - 38 = \underset{\textcircled{2}}{}$$

54 минус 40 и плюс 2 (в кружке) дает 16.

Чтобы вычесть число, близкое по величине к 100, отнимайте 100 и прибавляйте разницу. Например, вычитая 87 из какого-нибудь числа, отнимаем 100 и прибавляем 13, поскольку 100 — 87 = 13.

$$436 - 87 = \underset{\textcircled{13}}{}$$

Отнимем 100, что даст нам 336. Прибавим 13 (для чего

сначала прибавляем 10, а затем еще 3), получив в ответе 349. Все очень просто.

Вычитание числа меньше 100 из числа больше 100

Если вычитаемое (число, которое вычитают) меньше 100, а уменьшаемое (число, из которого вычитают) больше 100, но меньше 200, есть простой способ вычислить разность в уме.

Например:

$$134 - 76 = \underset{\textcircled{24}}{}$$

76 на 24 меньше 100. 134 на 34 больше 100. Прибавим 24 к 34 и получим легкий ответ: 58.

Решим другой пример:

$$152 - 88 = \underset{\textcircled{12}}{}$$

$$12 + 52 = 64 \quad \text{ОТВЕТ}$$

Решите несколько примеров самостоятельно:

а) 142 — 88 = _; б) 164 — 75 = _; в) 123 — 70 = _; г) 114 — 80 = _; д) 112 — 85 = _; е) 136 — 57 = _

Просто, не так ли? Если знать, как это делается. Ответы:

а) 54; б) 89; в) 53; г) 34; д) 27; е) 79

Если вы допустили ошибку, прочтите заново описание метода. Затем попробуйте еще раз.

Тот же принцип применим и к числам, которые больше или меньше 10. К примеру:

$$13 - 6 = \underset{+\textcircled{4}}{}$$

$$3 + 4 = 7 \quad \text{ОТВЕТ}$$

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 12 — 7 = _; б) 15 — 8 = _; в) 13 — 9 = _; г) 14 — 8 = _

Ответы:

а) 5; б) 7; в) 4; г) 6

Тот же подход справедлив и для вычитания трехзначных чисел:

$$461 - 275 =$$
$$\textcircled{25}$$
$$461 - 300 = 161$$
$$161 + 25 = 186$$

Мы выполняем лишь одно несложное вычитание, все остальное в решении — это сложение.

Попробуем еще:

$$834 - 286 =$$
$$\textcircled{14}$$
$$834 - 300 = 534$$
$$534 + 14 = 548$$

Про себя можно проговорить решение так: «Четырнадцать, которых не хватает до трехсот, плюс пятьсот, которых не хватает до восьмисот, дает пятьсот четырнадцать, плюс тридцать четыре — это пятьсот сорок восемь».

Чтобы прибавить 34, сначала приплюсовываем 30, а потом еще 4.

В этом состоит простой метод вычитания в уме. Не надо переносить или забирать разряды, и не представляет труда удерживание в уме сразу нескольких чисел.

Попробуйте решить следующие примеры сами:

а) 541 — 87 = _; б) 263–198 = _; в) 725–375 = _; г) 429–168 = _

Ответы:

а) 454; б) 65; в) 350; г) 261

В последнем примере можно было округлить 429 до 430, а потом отнять добавленную единицу в самом конце вычислений.

Вычитание на бумаге

Сейчас я расскажу о методе вычитания на бумаге, которому

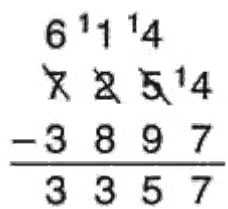
меня научили в третьем классе. Если вы достаточно освоили приемы умножения, описанные выше, данный метод не представит для вас труда.

Легкий способ вычитания используется в каждом из двух методов с переносом разрядов. О них вы непременно узнаете.

Разница между стандартным и легким способами вычитания является незначительной, но важной. Я объясню, как легче вычитать с помощью обоих методов, где используется перенос цифр из одного разряда в другой. Применяйте тот метод, который вам привычнее или кажется более простым.

Вычитание: первый метод

Возьмем типичный пример вычитания: 7254–3897 =



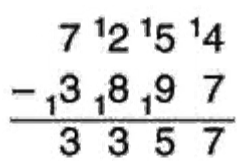
Вычтем 7 из 4. Это сделать невозможно, поэтому забираем 1 из разряда десятков. Вычеркиваем 5 и пишем выше 4. И вот в чем отличие. Вы не говорите «четырнадцать минус семь», а произносите: «Семь вычесть из десяти равно три», а затем прибавляете число, записанное над 7 (4), и получаете 7 — это первая цифра ответа.

Пользуясь таким подходом, вы никогда не вычитаете из числа, большего чем 10. Все остальное представляет собой операцию сложения. 9 вычесть из 4 невозможно, поэтому забираем 1 из разряда сотен. 10 минус 9 дает 1, 1 плюс 4 равно 5 — следующая цифра ответа.

8 вычесть из 1 нельзя, поэтому снова переносим 1 из следующего разряда. 10 минус 8 равно 2; 2 плюс 1 равно 3 — следующая цифра ответа.

6 минус 3 дает 3 — последняя цифра ответа.

Вычитание: второй метод



Вычитаем 7 из 4. Этого сделать нельзя, поэтому переносим 1 из разряда десятков. Ставим 1 перед 4, чтобы получилось 14, а

также записываем маленькую 1 перед 9 в колонке десятков. Вы не говорите «семь вычесть из четырнадцати», а произносите: «Семь вычесть из десяти дает три», плюс 4 сверху — получается 7 — это первая цифра ответа.

10 (9 плюс перенесенная 1) вычесть из 5 не удается, поэтому забираем 1 из следующего разряда, как и раньше.

10 при вычитании из 15 дает 5, или 10 минус 10 получается 0, прибавляем 5, равно 5.

9 из 2 не вычитается, поэтому опять переносим 1. 9 из 10 дает 1, прибавляем 2 и получаем 3.

7 минус 4 равно 3. Ответ готов.

Вам не надо запоминать комбинации однозначных чисел, которые дают в сумме числа, превышающие 10. Используя способ простого вычитания, вы никогда не отнимаете от чисел, больших 10. Это упрощает вычисления и снижает вероятность ошибки.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

Данный подход очень важен. Если вы вполне овладели умножением с помощью простых подходов, с которыми я познакомил вас ранее, то должны были усвоить комбинации чисел, дающих в сумме 10. Существует всего пять таких комбинаций.

С другой стороны, если бы вам пришлось выучить все комбинации однозначных чисел, которые дают в сумме число больше 10, то их уже 20. Используя же рассматриваемый подход, эти комбинации вообще не придется запоминать. Чтобы вычесть 8 из 15, отнимаем 8 от 10 (получаем 2), а затем прибавляем 5 и получаем ответ: 7.

а)
7325
- **4568**
——

б)
5417
- **3179**
——

Ответы:

а) 2757; б) 2238

Мой преподаватель в третьем классе учил меня никогда не вычитать из числа больше 10. Вероятность того, что вы допустите ошибку, вычитая из числа больше 10 и меньше 20, гораздо выше, нежели при вычитании из 10. Пользуясь таблицей умножения и правилами умножения из первых глав этой книги, вы почти никогда не допустите ошибок, вычитая из 10: ответы у вас будут получаться почти автоматически.

Вычитание из чисел, кратных 10

Правило такое:

> Вычитайте цифру разряда единиц из 10, каждую последующую — из 9, а затем уменьшите на 1 крайнюю левую цифру.

Например:
1000
- 574
——

Можно начинать либо с левой стороны, либо с правой.

Попробуем сначала справа. Вычитаем цифру, соответствующую разряду единиц, из 10.

10 — 4 = 6

Это последняя цифра ответа. Теперь вычтем остальные цифры из 9. А из первой цифры уменьшаемого (1000) вычтем 1.

10 минус 4 дает 6, 9 минус 7 дает 2, 9 минус 5 дает 4, 1 минус 1 дает 0. Таким образом, ответ равен 426.

Теперь попробуем слева направо: 1 минус 1 дает 0, 9 минус 5 равно 4, 9 минус 7 равно 2, 10 минус 4 равно 6. Ответ: 426.

Если нужно вычислить 40000 минус 2748, последовательность ваших действий должна быть такой:

40000
- 2742
——

Вычитаем 1 из крайней левой цифры (4) и получаем 3 — это первая цифра ответа. 9 минус 2 дает 7, 9 минус 7 дает 2, 9 минус 4 дает 5 и 10 минус 8 дает 2.

Таким образом, ответ равен 37252.

Используя этот способ, нам нужно лишь вычитать из чисел, не превышающих 10, а также выполнять сложение, когда это нужно.

Сам подход точно такой же, как и прежде. Единственная разница состоит в том, что вы произносите про себя свои действия.

Решите самостоятельно:

а)
10000
- 3456

—

б)
50000
- **27214**
—

Ответы:
а) 6544; б) 22786

Вычитание малых чисел из больших

Если вычитаемое число имеет меньше разрядов, чем уменьшаемое, тогда прибавьте нули перед числом (по крайней мере, мысленно), перед тем как вычислять.

Например:

$$\begin{array}{r} 23000 - 46 = \\ 23000 \\ -0046 \\ \hline 22954 \end{array}$$

Вычитаемое (число, которое вычитают) следует дополнить слева нулями до первой цифры уменьшаемого (число, из которого вычитают), отличающегося от нуля. Из этой цифры вы отнимаете 1. 3 минус 1 дает 2.

Отнимите каждую последующую цифру от 9, пока не дойдете до последней цифры, которую следует вычитать из 10.

Согласно методу, которому обучают в школе, вы выполняете точно такое же вычисление, однако вам необходимо все время помнить о цифрах, переносимых из разряда в разряд. Преимущество метода, который предлагаю я, состоит в том, что вычисления с его помощью становятся механическими и выполняются с меньшей вероятностью ошибки.

Проверка результата вычитания при помощи выбрасывания девяток

Для операции вычитания метод, используемый нами для проверки ответов, похож на тот, который мы применяли в отношении примеров на сложение. Но есть небольшое отличие.

Рассмотрим пример:

8465
- 2897
——

5568

Верен ли полученный ответ?

Давайте выбросим девятки и посмотрим.

8465	14	5
− 2897		8
5568	24	6

5 минус 8 равно 6? Может ли такое быть? Хотя в исходном примере мы вычитаем меньшее число из большего, в случае с подстановками вычитаемое больше, чем уменьшаемое.

Есть два пути. Один из них состоит в том, чтобы прибавить 9 к числу, из которого мы вычитаем.

5 плюс 9 дает 14. Задача выглядит так:

14 — 8 = 6

Имеет место равенство с контрольным числом, значит, наши вычисления верны.

А вот путь, который предпочитаю я. Решим ту же задачу в обратном направлении. Скорее всего, именно так вас учили проверять ответ в примерах на вычитание. Прибавьте ответ к числу, которое вычитали, и если получили уменьшаемое (контрольное число), значит, ответ правильный.

Проделаем то же самое с числами-подстановками. Сложим их в направлении снизу вверх:

6 + 8 = 5
6 + 8 = 14 и **1 + 4 = 5**

Ответ верный.

Теперь проверьте правильность решения нижеприведенных примеров посредством выбрасывания девяток. Если обнаружите ошибку, исправьте ее и еще раз проверьте ответ.

Все примеры были решены правильно, за исключением

в). Исправили ли вы этот ответ и проверили ли снова полученный ответ путем выбрасывания девяток? Правильный ответ — 7047.

а)

5672

- 2596
——

3076

б)
5967
- 3758
——

2209

в)
8542
- 1495
——

7147

г)
3694
- 1236
——

2458

Данный метод позволяет выявить большинство ошибок в примерах на сложение и вычитание. Используйте его и сделайте неотъемлемой частью своих вычислений. Займет он совсем немного времени, но поможет вам заслужить репутацию человека, исключительно точного в операциях с числами.

Глава 10
Возведение в квадрат

Возвести число в квадрат — значит умножить его на самого себя. Хороший способ представить себе это состоит в следующем. Если у вас во дворе нужно выложить плиткой квадратный участок и необходимо узнать, сколько для этого потребуется материала, то достаточно посчитать, сколько плитки пойдет на одну сторону, а затем умножить это число на самого себя. Если сторону участка занимают 3 плитки, тогда 9 плиток составят всю площадь участка (3 x 3 = 9). Если сторона составлена из 5 плиток, то весь квадрат состоит из 25 плиток (5 x 5 = 25).

5 в квадрате означает 5 x 5. Мы записываем это как 5^2. Маленькая 2, записанная после 5, означает, что речь идет о перемножении двух пятерок. А что означает маленькая 3, записанная после 5? Она означает, что надо перемножить подряд три пятерки. Это общепринятое математическое обозначение, и каждому человеку положено его знать. Вот несколько примеров:

$\mathbf{5^3 = 5 \times 5 \times 5}$

$\mathbf{4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$

$\mathbf{7^3 = 7 \times 7 \times 7}$

6^2 (произносится как «шесть в квадрате») = 36, потому что 6 x 6 = 36. Мы говорим, что 36 — это квадрат числа 6.

$\mathbf{13^2 = 13 \times 13 = 169}$

Мы легко можем вычислять подобные примеры, используя изученный выше метод перемножения чисел больше 10 и меньше 20. В частности, метод умножения с 100 использованием кружков особенно легко применять в отношении квадратов чисел, поскольку он лучше всего работает, когда перемножаемые числа являются близкими по значению. Добавлю, что все способы возведения в квадрат, представленные в настоящей главе, используют общий принцип перемножения чисел, рассмотренный нами ранее.

Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5

Метод возведения в квадрат чисел, которые оканчиваются на 5, использует ту же формулу, что и общий метод перемножения, освоенный нами ранее.

Если нам необходимо найти квадрат числа, оканчивающегося на 5, отделим прежде всего последнюю цифру 5 от находящейся перед ней цифры (или цифр). Прибавьте 1 к числу, состоящему из отделенной цифры (цифр), а затем перемножьте результат сложения и число. Припишите 25 справа к результату умножения, и вы получите окончательный ответ.

Например:

35^2 =

Отделим 5 от цифр впереди нее. В данном случае речь идет всего лишь о цифре 3, стоящей перед 5. Прибавим 1 к 3 и получим в результате 4.

3 + 1 = 4

Перемножим числа:

3 x 4 = 12

Припишем 25 (5 в квадрате) справа к 12. Полученное число и есть искомый ответ: 1225.

35^2 = 1225

Попробуем решить еще один пример:

75^2 (или 75 в квадрате) =

Отделим 7 от 5. Прибавим 1 к 7 и получим 8. 8 умножить на 8 равно 56. Это первая часть нашего ответа. Припишем 25 справа и получим искомый ответ: 5625.

75^2 = 5625

Сочетание этого метода с изученными ранее позволит получить еще более впечатляющие результаты. Рассмотрим это на примере:

135^2 =

Отделим 5 от 13. Прибавим 1 к 13 и получим 14. Произведение 13 x 14 дает 182 (используем метод, изученный в главе 2). Припишем 25 справа к 182 и получим ответ: 18225. Все эти расчеты можно легко произвести в уме.

135^2 = 18225

Еще один пример:

965^2 =

96 плюс 1 дает 97. Умножим 96 на 97 и получим 9312. Теперь припишем 25 справа к результату и получим ответ: 931225.

965^2 = 931225

Впечатляет, не так ли? Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 15^2 = _; б) 45^2 = _; в) 25^2 = _; г) 65^2 = _; д) 95^2 = _; е) 115^2 = _; ж) 145^2 = _; з) 955^2 = _

Если вы использовали бумагу и ручку, чтобы вычислить ответы, попробуйте теперь повторить вычисления в уме. Вы обнаружите, что ничего сложного в этом нет.

Ответы:

а) 225; б) 2025; в) 625; г) 4225; д) 9025; е) 13225; ж) 21025; з) 912025

Данный метод применим также к числам с десятичной запятой. Например, в случае 6,5 х 6,5 мы просто «забываем» о запятой и находим ей место лишь в самом конце вычислений.

$6{,}5^2$ =

65^2 = 4225

В сумме у множителей в данном примере имеются две цифры после запятой, если квадрат записать в виде произведения двух одинаковых чисел, и в ответе после запятой также должно быть две цифры. Поэтому искомый ответ равен 42,25.

$6{,}5^2$ = 42,25

Тот же метод работает и для произведения 6,5 х 65, которое соответственно будет равно 422,5.

Подобным образом, если надо перемножить $3^1/_2$ и $3^1/_2$, это даст в ответе $12^1/_4$ (то есть 12,25).

Данный метод находит много применений.

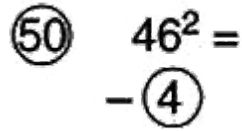
Возведение в квадрат чисел, близких по значению к 50

Метод для возведения в квадрат чисел, близких по значению к 50, использует ту же формулу, что и при перемножении любых чисел. Однако есть еще один способ, позволяющий значительно упростить вычисления.

Например:

46 в квадрате означает 46 х 46. Округляя, получаем 50 х 50 = 2500. Берем 50 и 2500 в качестве опорных чисел.

46 меньше, чем 50, поэтому рисуем кружок под примером.



46 на 4 меньше 50, поэтому вписываем 4 в кружок. Впереди ставим минус.

Отнимаем 4 из числа сотен в 2500.

25 — 4 = 21

Это число сотен в искомом ответе. Его можно записать как 2100 (21 х 100). Чтобы получить остальную часть ответа,

возведем в квадрат число в кружке.

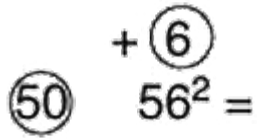
4^2 = 16

2100 + 16 = **2116** ОТВЕТ

Рассмотрим другой пример:

56^2 =

56 больше, чем 50, поэтому рисуем кружок над примером.

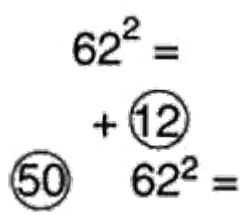


Прибавляем 6 к числу сотен в 2500 (25). 25 плюс 6 дает 31. Промежуточный ответ равен 3100.

6^2 = 36

3100 + **36** = **3136** ОТВЕТ

Попробуем решить еще один пример:



25 + 12 = 37 (промежуточный ответ равен 3700)

12^2 = 144

3700 + **144** = **3844** ОТВЕТ

Попробуйте решить самостоятельно следующие примеры:

а) 57^2 = _; б) 51^2 = _; в) 48^2 = _; г) 39^2 = _; д) 45^2 = _

Ответы:

а) 3249; б) 2601; в) 2304; г) 1521; д) 2025.

Немного попрактиковавшись, вы вскоре будете в состоянии незамедлительно называть ответ.

Возведение в квадрат чисел, близких по значению к 500

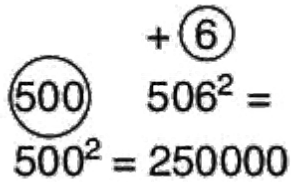
Метод напоминает тот, что мы использовали для чисел, близких по значению к 50.

500, умноженное на 500, дает 250000. Берем 500 и 250000 в качестве опорных чисел.

Например:

506^2 =

506 больше, чем 500, поэтому рисуем кружок вверху. В него вписываем 6.



Число в кружке следует прибавлять к числу тысяч.

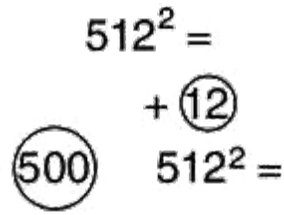
250 + 6 = 256 тысяч

Возведем в квадрат число в кружке:

6^2 = 36

256000 + 36 = 256036 ОТВЕТ

Разберем другой пример:



250 + 12 = 262

Промежуточный ответ — 262000

12^2 = 144

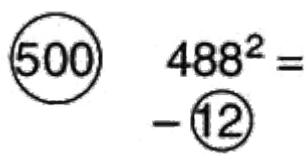
262000 + 144 = 262144 ОТВЕТ

Для возведения в квадрат чисел, которые немного меньше 500, используйте следующий способ.

Рассмотрим пример:

488^2 =

488 меньше, чем 500, поэтому рисуем кружок внизу. Поскольку 488 на 12 меньше, чем 500, вписываем в кружок 12.

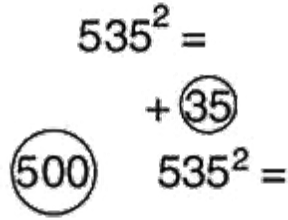


250 тысяч минус 12 тысяч дает 238 тысяч. Прибавляем 12 в квадрате (12^2 = 144).

238000 + 144 = 238144 ОТВЕТ

Можно добиться результата еще более впечатляющим способом.

Например:



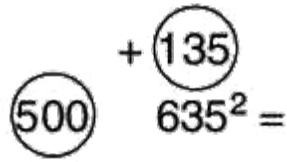
250000 + 35000 = 285000

35^2 = 1225

285000 + 1225 = 286225 ОТВЕТ

Все это легко рассчитывается в уме. Мы использовали два ускоряющих метода: метод для возведения в квадрат чисел, близких по значению к 500, и метод для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5.

А как насчет 635?



250000 + 135000 = 385000

135^2 = 18225

Чтобы вычислить 135^2, мы используем способ для вычисления квадрата чисел, оканчивающихся на 5, и способ для перемножения чисел больше 10, но меньше 20 (13 + 1 = 14, 13 x 14 = 182). Приписываем 25 справа к 182, получаем: 135^2 = 18225.

Можно произносить полученный ответ так: «Восемнадцать тысяч, два, два, пять».

Чтобы прибавить 18000, прибавляем 20 и вычитаем 2.

385 + 20 = 405

405 — 2 = 403

Припишем 225 справа.

Искомый ответ: 403225.

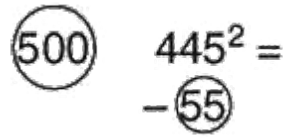
Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 506^2 = _; б) 534^2 = _; в) 489^2 = _; г) 445^2 = _

Ответы:

а) 256036; б) 285156; в) 23912;1 г) 198025

Решим последний пример вместе:

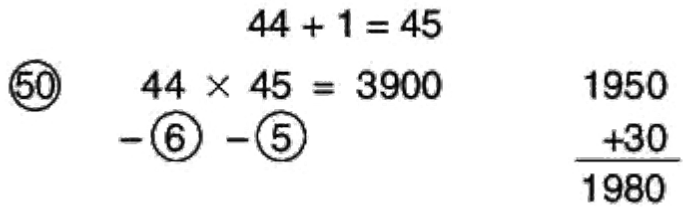


250 — 55 = 195 (**195** x **1000** = **195000**)

55^2 = 3025 (используем способ для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5)

195000 + 3025 = 198025

Мы могли бы решить данный пример, используя лишь способ возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5. Число, составленное из цифр перед 5, равно 44.



Припишем 25 справа к промежуточному ответу 1980 и получим 198025.

Таким образом, у вас теперь есть несколько методов на выбор.

Числа, оканчивающиеся на 1

Данный способ применяется для возведения в квадрат любого числа, оканчивающегося на 1. Если вы попробуете перемножить два подобных числа традиционным способом, то поймете, почему данный метод работает. Например:

31^2 =

Во-первых, вычтем 1 из числа, возводимого в квадрат. Число теперь оканчивается на нуль, и его легко возвести в квадрат.

30^2 = 900 (3 x 3 x 10 x 10)

Это наш промежуточный результат.

Во-вторых, сложим 30 и 31 (число, которое мы возвели в квадрат, и число, которое собираемся возвести в квадрат):

30 + 31 = 61

Прибавим полученный результат к 900 и получим 961.

900 + 61 = 961 ОТВЕТ

На втором этапе решения вы могли бы просто удвоить число, которое ранее возвели в квадрат (30 x 2 = 60), а затем прибавить 1.

Разберем другой пример:

121^2 =

121 — 1 = 120

120^2 = 14400 (12 x 12 x 10 x 10)

120 + 121 = 241

14400 + 241 = 14641 ОТВЕТ

Попробуем еще:

351^2 =

350^2 = 122500 (используем способ для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5)

350 + 351 = 701

122500 + 701 = 123201 ОТВЕТ

Еще один пример:

86^2 =

Можно использовать способ для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 1, а также для чисел, оканчивающихся на 6. Например, вычислим 86^2. Будем рассматривать 86 как число, которое на 1 больше 85.

85^2 = 7225

85 + 86 = 171

7225 + 171 = 7396 ОТВЕТ

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 21^2 = _; б) 41^2 = _; в) 61^2 =_; г) 71^2 = _; д) 81^2 = _; е) 131^2 = _; ж) 141^2 = _; з) 66^2 = _

Ответы:

а) 441; б) 1681; в) 3721; г) 5041; д) 6561; е) 17161; ж)19881; з) 4356

Чтобы решить эти примеры в уме, я называю первый промежуточный результат в виде сотен — тогда вторую часть ответа легче прибавлять. Например, для возведения в квадрат 71 в уме я проговариваю про себя: «Семьдесят в квадрате равно сорок девять сотен; семьдесят на два — сто сорок, пятьдесят сотен и сорок плюс один, пять тысяч сорок один (5041)».

На самом деле я говорю еще короче: «Сорок пять сотен; пять тысяч сорок… один».

Чтобы найти квадрат 66 в уме, я говорю про себя: «Шестьдесят пять в квадрате — сорок два и двадцать пять», использовав способ для возведения в квадрат чисел,

оканчивающихся на 5. «Шестьдесят пять на два равно сто тридцать, сорок три пятьдесят пять плюс один, сорок три пятьдесят шесть (4356)».

Теперь попробуйте решить примеры, предложенные выше, в уме.

Числа, оканчивающиеся на 9

Пример:

29^2 =

Во-первых, прибавим 1 к числу, возводимому в квадрат. Теперь оно оканчивается на 0, и его квадрат легко найти.

30^2 = 900 (3 x 3 x 10 x 10)

Это наш промежуточный результат. Теперь сложим 30 и 29 (число, которое мы возвели в квадрат, и число, которое собираемся возвести в квадрат):

30 + 29 = 59

Вычтем 59 из 900 и получим в ответе 841. (Я удваиваю 30, получая 60, а затем вычитаю 60 из 900 и потом прибавляю 1.)

900 — 59 = 841 ОТВЕТ

Разберем еще один пример:

119^2 =

119 + 1 = 120

120^2 = 14400 (12 x 12 x 10 x 10)

120 + 119 = 239

14400 — 239 = 14161

14400 — 240 + 1 = 14161 ОТВЕТ

Возьмем другой пример:

349^2 =

350^2 = 122500 (используем способ для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5)

350 + 349 = 699

(Вычтем 1000, а потом прибавим 301, чтобы вычислить ответ.)

122500 — 699 = 121801 ОТВЕТ

А как нам вычислить 84 в квадрате?

Можно использовать способ для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 9 или 4. Будем рассматривать 84 как число, которое на 1 меньше 85.

84^2 =

85^2 = 7225

85 + 84 = 169

Теперь вычтем 169 из 7225:

7225 — 169 = 7056 ОТВЕТ

(Вычитаем 200, а затем прибавляем 31, чтобы получить ответ.)

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 69^2 = _; б) 79^2 = _; в) 89^2 = _; г) 74^2 = _

Ответы:

а) 4761; б) 6241; в) 7921; г) 5476

Решим пример б) вместе. Чтобы найти квадрат 79 в уме, я сказал бы про себя: «Восемьдесят в квадрате дает шестьдесят четыре сотни. Дважды восемьдесят — сто шестьдесят. Шестьдесят четыре сотни минус двести равно шестьдесят две сотни, плюс сорок — шестьдесят две сотни сорок, плюс один — шестьдесят две сотни сорок один (6241)».

Разумеется, проговаривать всего этого не требуется. Можно просто сказать: «Шестьдесят четыре сотни, шестьдесят две сорок. один».

В примере в), возможно, легче было бы использовать общий метод перемножения чисел с опорным числом: используя 100 в качестве опорного и перемножая просто 89 и 89.

Вы можете выбрать для себя наиболее легкий метод и успешно его применять.

Упражняйтесь в решении подобных примеров в уме, и со временем вы будете делать это легко.

Глава 11
Деление на однозначное число

Если вы чувствуете себя уверенно с данным видом деления, тогда можете смело пропустить эту главу. Однако у многих людей бывают проблемы с решением даже простых задач на деление.

Если вам надо разделить 32 доллара на четырех человек, вы разделите 32 на 4, чтобы узнать, сколько долларов получить каждый. Поскольку 4 на 8 равно 32 (4 x 8 = 32), каждый человек должен получить 8 долларов. Это простая задача на деление. Если бы вам пришлось делить 32 доллара на восемь человек, тогда каждый получил бы по 4 доллара.

Если нам нужно раздать 35 книг четырем студентам, то каждый из них получил бы по восемь книг, и осталось бы еще три. Мы называем их остатком. Вычисление можно было бы записать так:

$$4\overline{)35}$$
$$8\ r3 \quad (r - остаток)$$

или

$$\begin{array}{r} 8\ r3 \\ 4\overline{)35} \end{array}$$

А вот как мы стали бы делить большее по величине число. Чтобы разделить 4921 на 4, запишем задачу следующим образом:

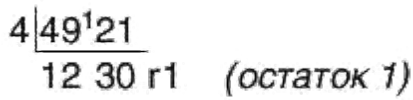
$$4\overline{)4921} \quad \text{или} \quad 4\overline{)4921}$$

Начинаем решать с левой цифры числа, которое мы делим (делимое). 4 — это первая цифра слева. Начинаем с вопроса: на что нужно умножить 4, чтобы получить в ответе 4? Ответом будет 1, поскольку 1 x 4 = 4. Запишем 1 под цифрой 4. 4 делится на 4 без остатка, так что переносить ничего не придется.

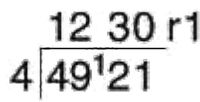
Теперь переходим к следующей цифре: 9. На что нужно умножить 4, чтобы получить 9? Нет целого числа, которое даст 9 после умножения на 4. Теперь спросим себя, какое число надо

умножить на 4, чтобы получить число меньше 9? 2, умноженное на 4, дает 8, которое меньше 9 и одновременно ближе всех других чисел к 9. Записываем 2 под цифрой 9, а остаток 1 переносим в следующий разряд и указываем перед следующей за 9 цифрой в виде маленькой 1 вверху.

Теперь делим 12 на 4. Какое число после умножения на 4 дает 12? Ответом является 3 (3 x 4 = 12). Записываем 3 под цифрой 2. Следующая цифра меньше, чем 4, поэтому деление не может быть выполнено. Иными словами, 1 при делении на 4 дает 0 и в остатке 1.



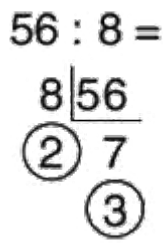
или:



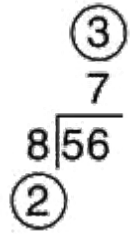
Остаток 1 может быть выражен через дробь: 1/4. Таким образом, ответом будет $1230^{1}/_{4}$, или 1230,25.

Использование кружков

Так же как нашу генеральную формулу можно с успехом применять для решения задач на умножение, ее можно использовать и для вычисления примеров на деление. Метод лучше всего работает в случае деления на 7, 8 и 9. Возьмем простой пример:



Метод работает так. Мы делим 56 на 8. Решение записываем либо способом, представленным выше, либо (если предпочтительнее) тем, который показан ниже. Пользуйтесь тем способом, который вам удобнее.



Я буду объяснять, пользуясь первым способом. Рисуем кружок под 8 (числом, на которое мы делим, то есть делителем) и спрашиваем себя, сколько не хватает до 10. Ответом является 2, поэтому вписываем 2 в кружок под 8. Прибавляем 2 к цифре в разряде десятков числа, которое мы делим (5 — это цифра из разряда десятков в числе 56), и получаем в ответе 7. Записываем 7 под цифрой 6 в числе 56. Рисуем кружок под 7. Сколько не хватает до 10? В данном случае — 3, поэтому вписываем 3 в кружок под 7. Теперь перемножаем числа в кружках.

2 x 3 = 6

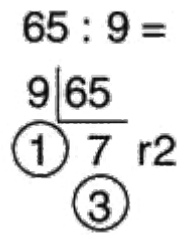
Вычтем 6 из цифры в разряде единиц в числе 56, чтобы получить остаток.

6 – 6 = 0

Остаток нулевой.

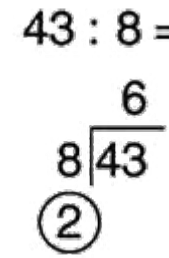
Ответ: 7 без остатка.

Рассмотрим другой пример:

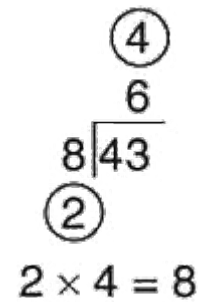


9 меньше 10 на 1, поэтому записываем 1 в кружке под делителем 9. Прибавим 1 к цифре десятков (6) и получим 7. Запишем 7 как целую часть ответа под цифрой 5. Рисуем кружок под 7. Сколько не хватает до 10? 3. Вписываем 3 в кружок под 7. Перемножим числа в кружках: 1 x 3 = 3. Отнимем 3 от цифры единиц (5) и получим остаток: 2. Ответ: 7 с остатком 2.

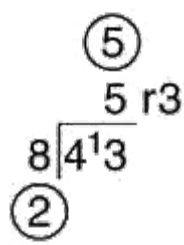
А вот еще один пример, который объясняет, что нам делать, когда целая часть оказывается слишком большой.



8 меньше 10 на 2, поэтому вписываем 2 в кружок под делителем 8. 2 плюс 4 равно 6. Записываем 6 над цифрой из разряда единиц. Теперь нарисуем еще один кружок над 6. Сколько не хватает до 10? Ответом является 4, поэтому вписываем 4 в верхний кружок. Чтобы узнать остаток, умножаем числа в кружках и вычитаем ответ из цифры из разряда единиц. Теперь решение выглядит таким образом:



Однако здесь мы сталкиваемся с тем, что вычесть 8 из цифры из разряда единиц (3) нельзя. Целая часть оказалась слишком большой. Чтобы исправить положение, уменьшим целую часть на 1, получив 5, и припишем маленькую 1 перед цифрой из разряда единиц (3), так что теперь оно превратилось в 13.



Умножаем числа в кружках: 2 x 5 = 10. Вычтем 10 из 13, в которое превратилась цифра из разряда единиц.

13 — 10 = 3 (остаток)

5 r3 ОТВЕТ

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 76: 9 = _; б) 76: 8 = _; в) 71: 8 = _; г) 62: 8 = _; д) 45: 7 = _; е) 57: 9 = _

Ответы:

а) 8 r4; б) 9 r4; в) 8 r7; г) 7 r6; д) 6 r3; е) 6 r3

Метод полезен тем, кто еще не освоил таблицы умножения и у кого возникают трудности с делением, или в тех случаях, когда нет уверенности в правильности ответа и хотелось бы его проверить. Как правило, чем лучше вы знаете таблицу умножения, тем легче вам делить на однозначное число.

Глава 12
Деление в столбик по множителям

Если вам надо разделить 368 долларов на 16 человек, то вы разделите 368 на 16, чтобы узнать, сколько должен получить каждый.

Если вы не знаете всех вариантов умножения на 16, есть простой способ решить эту задачу. 16 — это 2 на 8, а также 4 на 4. Простой способ деления на 16 состоит в том, чтобы использовать его множители. Можно разделить сначала на 4, а потом полученный результат разделить опять на 4. Это то же самое, что делить на 16, потому что 4 x 4 = 16.

Можно было бы записать решение задачи следующим образом:

```
4|368
4| 92
 | 23
```

Как и в случае с делением на однозначное число, решение можно записать и по-другому:

```
  23
4| 92
4|368
```

Деление на такие числа, как 14 и 16, достаточно легко выполнять в уме. Не представляет труда разделить число пополам, прежде чем делить на больший множитель. Если вам надо разделить 368 на 16 в уме, вы могли бы сказать про себя: «Половина от тридцати шести — восемнадцать, половина от восьми — четыре». Вы получили 184. Теперь 118 вы делите уже меньшее число на 8 (которое осталось от 16 после того, как мы разделили на 2).

18 при делении на 8 дает 2 с остатком 2. Этот остаток (из разряда десятков) переносим в разряд единиц (цифра 4), получая 24. 24 при делении на 8 дает 3 без остатка. Таким образом, ответ равен 23 без остатка. Все это легко вычисляется в уме.

Общее правило деления по множителям состоит в том,

чтобы сначала делить на меньшее число, а потом на большее.

Идея в том, что в итоге вы делите меньшее число на больший множитель.

Например, если вам надо разделить 3444 на 21, то вы сначала делите на 3, а потом на 7. К моменту, когда надо будет делить на 7, исходное число успеет уменьшиться в несколько раз.

3444: 3 = 1148

1148: 7 = 164

Делить 1148 на 7 легче, чем 3444 на 7.

Деление на числа, оканчивающиеся на 5

Чтобы разделить на двузначное число, которое оканчивается на 5, удвойте оба числа и используйте деление по множителям.

Например:

1085: 35 =

Удвоим оба числа. 2 на 1000 равно 2000, 2 на 85 равно 170.

1085 x **2 = 2170**

35 x **2 = 70**

Теперь задача выглядит так:

2170: 70 =

Чтобы разделить на 70, делим сначала на 10, а потом на 7 (по множителям).

2170: 10 = 217

217: 7 = 31

Вычисление очень простое. 21 при делении на 7 дает 3 (3 x 7 = 21), а 7 делится на 7 один раз без остатка. Теперь мы можем записать ответ для нашего исходного примера:

1085: 35 = 31 ОТВЕТ

Попробуем решить другой пример:

512: 35 =

500 при умножении на 2 дает 1000. 12, умноженное на 2, равно 24. Таким образом, 512, умноженное на 2, дает 1024. 35, увеличенное вдвое, дает 70.

Теперь задача выглядит так:

1024: 70 =

Разделим сначала на 10, а потом на 7:

1024: 10 = 102,4

102,4: 7 =

10 при делении на 7 дает 1. 1 — это первая цифра ответа. Прибавляем остаток 3 (из разряда десятков) к цифре 2, что дает

нам 32.

32: 7 = 4 r4

Мы получили в ответе 14 с остатком 4. Приписываем 4 к следующей цифре (после запятой), что дает нам 44.

44: 7 = 6 r2

Окончательный ответ: 14,62. Это ответ к нашей исходной задаче:

512: 35 = 14,62

Можно делить числа с помощью множителей до любого количества знаков после запятой.

Припишите столько нулей после запятой, сколько требуется для ответа, и добавьте еще один. Это позволит гарантировать, что последняя цифра после запятой будет получена с требуемой точностью.

К примеру, если надо разделить 736 на 21 и при этом ответ должен быть получен с точностью до двух знаков после запятой, к делимому надо приписать три нуля после запятой.

Таким образом, вы делили бы 736,000 на 21. Итак:

```
    35,047
7 | 245,333
3 | 736,000
```

Далее объясняется, как округлять три знака после запятой до двух.

Округление десятичных дробей

Чтобы округлить дробь до двух знаков после запятой, рассмотрим третью цифру после запятой. Если она меньше 5, тогда вторую цифру оставляем как есть и просто удаляем третью. А если же она равна или больше 5, следует вторую цифру увеличить на 1, а третью удалить.

В предыдущем примере третьей цифрой после запятой является 7. 7 больше, чем 5, поэтому округляем ответ путем увеличения на 1 второй цифры после запятой (4), получив 5.

Таким образом, ответом с точностью до двух знаков после запятой является 35,05.

Ответом с точностью до семи знаков будет 35,0476190. Потом знаки повторяются, так что до 13 знаков после запятой ответ

выглядит так:

35,0476190476190

Чтобы округлить до 12 десятичных знаков, рассмотрим тринадцатую цифру, которая равна нулю (меньше 5), поэтому 9 оставляем без изменения:

35,047619047619

Двенадцатая цифра равна 9 (больше 5), поэтому при округлении до одиннадцатого знака цифра 1 переходит в 2:

35,04761904762

При округлении до десятого знака замечаем, что одиннадцатая цифра равна 2 (меньше 5), поэтому оставляем 6 без изменения:

35,0476190476

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно. Вычисления выполняйте до двух знаков после запятой:

а) 4356: 42 = _; б) 2355: 35 = _; в) 4173: 27 = _; г) 8317: 36 = _

Ответы:

а) 103,71; б) 67,29; в) 154,56; г) 231,03

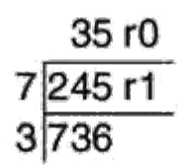
Определение остатка

Иногда при делении нам хотелось бы знать остаток, а не цифры после запятой. Как нам узнать остаток, когда мы делим по множителям?

Правило звучит так:

Умножьте первый делитель на второй остаток и прибавьте первый остаток.

Для вышеприведенного примера мы поступили бы следующим образом:



Начнем с того, что перемножим числа в нижнем левом и верхнем правом «углах»:

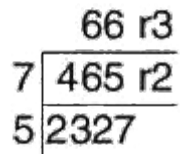
3 x 0 = 0

Теперь прибавим первый остаток (1). Искомый остаток равен 1, или 1/21.

Еще один пример:

2327: 35 =

Берем 7 и 5 в качестве множителей числа 35.



Чтобы найти окончательный остаток, перемножаем «угловые» числа (3 x 5 = 15). Теперь прибавим другой остаток (2):

15 + 2 = 17

Получаем в ответе 66 с остатком 17.

Решите следующие примеры самостоятельно и вычислите остаток.

а) 4335: 36 = _; б) 2710: 24 = _

Ответы:

а) 120 r15; б) 112 r22

Деление столбиком по множителям позволяет выполнять немало вычислений в уме, за которые иной человек не рискнул бы и взяться. Я постоянно все результаты вычисляю в уме прямо по ходу соревнований и потому знаю положение в турнирной таблице до того, как объявляют данные. Кроме того, математические вычисления — это прекрасная зарядка для ума.

Глава 13
Стандартное деление столбиком

Когда мы имеем дело с делением на простые числа, то не можем использовать множители, чтобы преобразовать задачу в простое деление на однозначное число. (Простыми являются те числа, у которых нет множителей, например 29.)

Однако мы по-прежнему можем использовать множители при решении таких задач. Речь идет об оценке приближенного значения по ходу решения. Вместо 29, например, мы делим на 30 (сначала на 10, а потом на 3), чтобы узнать целую часть при делении на 29. Например:

24560: **29** =

29 |**24560**

Нельзя разделить 24 на 29, поэтому добавляем следующую цифру (5). Сколько раз 29 содержится в 245? В этом месте многие жалуются, что сделать это трудно.

Есть простой способ. 29 — это почти 30, поэтому можно сделать оценку путем деления на 30. Чтобы разделить на 30, сначала делим на 10 (что очень легко), а потом на 3 (тоже легко).

После деления 245 на 10 (24,5) просто отбросим последнюю цифру результата и забудем на время об остатке. Задача сейчас состоит в том, чтобы разделить 24 на 3, что не составляет труда. 3 на 8 равно 24. 8 — это первая цифра ответа. Записываем ее над цифрой 5, поскольку сначала речь шла о делении 245 на 29.

Теперь умножим наш ответ (8) на 29, чтобы узнать остаток. Простой способ умножения 29 на 8 состоит в том, чтобы умножить 30 на 8 и вычесть 8 (30 x 8 = 240, 240 — 8 = 232).

8 x **29** = **232**

Вычтя 232 из 245, получаем остаток: 13. Теперь решение выглядит так:

```
    8
29|24560
 –232
  13
```

Теперь сносим следующую цифру в числе, которое мы делим (делимое). Речь идет о цифре 6. Сносим ее к остатку 13 и получаем 136. Помечаем 6 сверху крестиком «x», чтобы помнить о

том, что мы эту цифру использовали.

Делим 136 на 29. Как и раньше, делим сначала на 10, а потом на 3. 136 после деления на 10 дает 13 (остаток отбрасываем), а 13, деленное на 3, дает 4, если не учитывать остаток (4 x 3 = 12). Следующая цифра ответа равна 4. 4 на 29 дает 116. Вычтем 116 из 136 и получим 20.

Снесем 0, получив 200. Делим 200 на 30 (10 x 3):

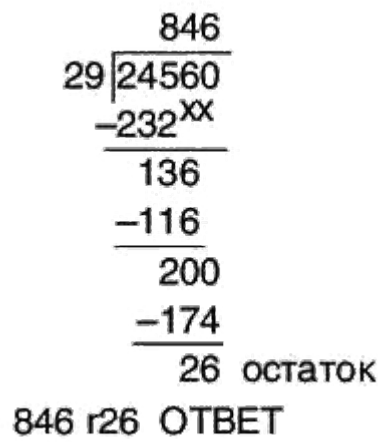
200: 10 = 20

20: 3 = 6

Это последняя цифра ответа.

6 x **29** = **174**

Вычтем 174 из 200 и получим остаток: 26. Полностью решенная задача выглядит так:



Общее правило для стандартного деления столбиком таково:

> Округляйте делитель до следующего десятка, сотни или тысячи, чтобы было легче оценивать целую часть от деления.

• При делении на 31 округляйте до 30 и делите на 3 и 10.

• При делении на 87 округляйте до 90 и делите на 9 и 10.

• При делении на 321 округляйте до 300 и делите на 3 и 100.

• При делении на 487 округляйте до 500 и делите на 5 и 100.

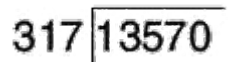
• При делении на 6142 округляйте до 6000 и делите на 6 и 1000.

Действуя таким образом, вы сможете быстро прикинуть, какова величина искомой целой части, и вносить в ход решения требуемые коррективы.

Попробуем решить еще один пример:

13570: 317 =

Записываем задачу как обычно:



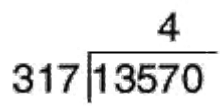
Округляем 317 до 300, и используемыми множителями будут 3 и 100.

Нельзя разделить 1 или 13 на 300. Также нельзя разделить 135 на 300, но зато 1357 можно. Сколько раз 300 содержится в 1375?

Чтобы разделить на 300, сначала разделим 1357 на 100, а потом на 3.

Деля 1357 на 100, необходимо просто переместить десятичную запятую на две позиции влево или, что еще проще, отбросить две последние цифры. Осталось разделить 13 на 3.

Ответом, разумеется, будет 4 с остатком 1. Нас не волнует остаток на данном этапе, поэтому требуемый ответ — 4. Записываем 4 в качестве первой цифры ответа исходной задачи.



Цифру 4 в исходной задаче следует поместить над цифрой 7, поскольку на самом деле мы только что делили 1357 на 317.

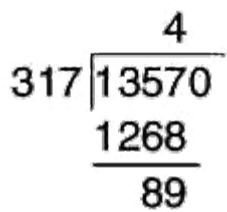
Теперь умножим 317 на 4, чтобы узнать остаток от деления.

317 x **4** = **1268**

Запишем 1268 под 1357 и вычтем одно из другого.

1357 – 1268 = 89

Наши вычисления на данный момент выглядят следующим образом:



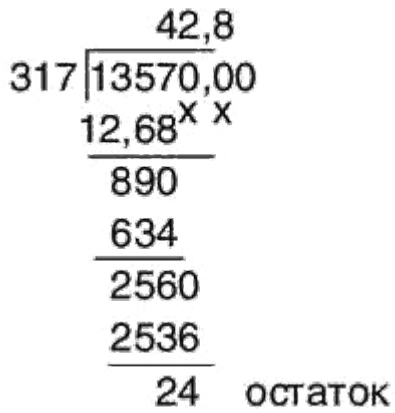
Теперь снесем следующую цифру делимого — 0. Число, с которым мы работаем теперь, — 890. Нам необходимо разделить 890 на 317. Деление на 100 дает 8. Деление затем на 3 дает 2. Запишем эту цифру над цифрой 0.

Умножаем 317 на 2, чтобы узнать остаток.

2 x **317** = **634**
890 – 634 = 256
256 — это наш остаток.
В окончательном виде решение выглядит так:

Если мы хотим выразить ответ в виде десятичной дроби, можно продолжить деление. Общее правило при делении состоит в том, чтобы приписывать делимому на один нуль больше после запятой, чем требуется десятичных знаков в ответе.

Если мы хотим получить ответ с точностью до одного знака после запятой, разделим 13570,00 на 317 и выполним округление.



В данном случае, даже если мы попытаемся продолжить до следующего знака после запятой, то сразу же заметим, что после снесения еще одного нуля и выполнения следующего шага (240: 317) мы получим в ответе число меньше 1, то есть 0 и еще что-то. Это даст нам 42,8, что вполне удовлетворяет точности, которая требуется от ответа.

При делении на 317 самое большое число, на которое мы по-

настоящему делили, равнялось 3. Благодаря этому вычисления оказались несложными.

В этой связи вполне справедливым кажется утверждение, что деление даже на достаточно большие числа в столбик — это несложная операция.

Какие числа вы использовали бы в качестве множителей при делении на следующие числа?

а) 78; б) 289; в) 723; г) 401

На вашем месте в качестве множителей я бы использовал:

а) 8 х 10 (80); б) 3 х 100 (300); в) 7 х 100 (700); г) 4 х 100 (400)

А какое приближенное число вы использовали бы в случае деления на 347? 347 ближе к 300, чем к 400, однако ни то, ни другое число не кажется подходящим выбором. Более простым подходом было бы удвоить и делитель, и делимое.

Например, чтобы разделить 33480 на 347, удвоим оба числа, что никак не повлияет на результат. Удвоив 33480, получим 66960; удвоив же 347, получим 694.

Теперь задача выглядит так: 66960 разделить на 694. Используем 700 в качестве приближенного числа. Легко оценить целую часть ответа в исходной задаче, разделив сначала 67000 на 700.

Разделив 67000 на 100, получаем 670. Затем, разделив 670 на 7, получаем 9 с остатком 4. Деление 40 (67000— 66960) на 7 дает без малого 6. Наше приближенное значение ответа составляет 96.

Решив исходный пример, получаем в ответе 96,48.

Однажды, участвуя в правительственной программе по повышению эффективности преподавания математики в школе, я заявил, что учу своих учеников тому, как использовать множители при делении на простые числа. Одному учителю показалось, что такого не может быть, и он попросил меня показать, как мне это удается.

Я показал учителям этой школы методы, изложенные в настоящей главе. Преподаватель, который усомнился в моей правоте, в конце презентации сказал: «Знаете, я всегда именно так и выполнял деление, но мне и в голову не приходило учить этому своих учеников».

Глава 14
Прямое деление

Если вы легко выполняете деление на однозначные числа, то деление столбиком не должно представлять для вас труда. Если вы делите на число, не являющееся простым (то есть на число, которое может быть разложено на множители), то задача не представляет особого труда. Деление на большие числа также не должно создавать проблем, если вы используете принцип приближенной оценки посредством множителей. Ниже я предлагаю альтернативный метод, который может быть использован для деления на двузначные и трехзначные числа.

Деление на двузначные числа

Рассмотрим пример:

2590: **73** =

Прежде всего округляем 73 до 70 и будем делить на 10 и 7, делая по ходу поправку на 3, которое держим в уме.

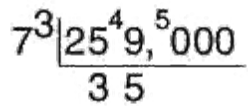
Делим число на 10. Это переместит запятую на одну позицию влево.

2590: **10** = **259,0**

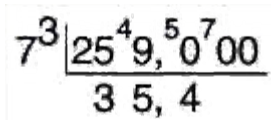
Теперь делим 259,0 на 7, делая одновременно поправку на 3.

$$7^{3}\overline{)25^{4}9,^{5}000}$$
$$3\ 5$$

25 делится на 7 три раза (3 x 7 = 21) с остатком 4. Таким образом, 3 — это первая цифра ответа. Переносим остаток, как при обычном способе деления. Приписав 4 к следующей цифре делимого (9), получаем 49. Внесем поправку путем умножения предыдущей цифры ответа (3) на цифру единиц (3) в исходном делителе (73). Получаем: 3 x 3 = 9. Вычтем 9 из 49 и получим 40. Теперь разделим 40 на 7. В ответе получается 5, поскольку 5 x 7 = 35 (остаток 5). 5 — это вторая цифра искомого ответа. Переносим остаток к следующей цифре, после чего работаем с числом 50.

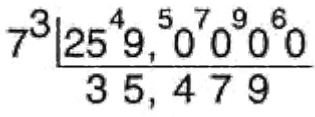


Умножим последнюю полученную цифру ответа (5) на цифру единиц в исходном делителе (3). Получаем 15. Вычитаем 15 из 50 и получаем 35. Делим 35 на 7. Имеет место деление нацело, и в ответе получается 5. Остатка у нас нет, и в связи с этим у нас возникает проблема, что переносить к следующей цифре. Уменьшаем полученный ответ на 1 и получаем 4 с остатком 7 (замечание: 4 x 7 + 7 (остаток) = 5 x 7, то есть мы просто иначе выразили одно и то же число).



Умножим 4 на цифру единиц (3) и получим 12. Вычтем 12 из 70 и получим 58. 58, деленное на 7, дает 8 с остатком 2. Перенос 2 даст нам новое число для работы: 20. Достаточно ли оно велико? Нам придется вычесть 8 x 3 = 24 из 20. Полученный ответ снова слишком большой, поэтому уменьшаем его на 1 и получаем 7. 58, деленное на 7, дает нам 7 с остатком 9. Записываем 7 и переносим 9 дальше. Получили рабочее число 90. Далее: 7 x 3 = 21 и 90–21 = 69. Это приемлемо.

Поделив 69 на 7, имеем 9 с остатком 6. 9 — это следующая цифра ответа.



После соответствующей тренировки все вычисления могут быть выполнены в уме.

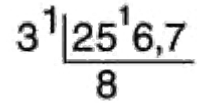
Рассмотрим другой пример:

2567: **31** =

30 — это 3, умноженное на 10, поэтому делим сначала на 10, а потом на 3, внося по ходу решения поправки.

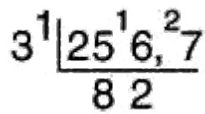
2567: **10** = **256,7**

25 делится на 3 восемь раз с остатком 1. 8 будет первой цифрой нашего ответа. Остаток 1 переносится к следующей цифре делимого, что дает нам 16.

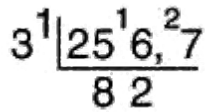


Внося поправку, умножим полученную цифру ответа на цифру единиц (1) в делителе (31). 8 х 1 = 8. Вычитаем 8 из рабочего числа 16 и получаем в ответе 8.

Теперь делим 8 на 3. В ответе получаем 2 с остатком 2. Переносим остаток 2 к следующей цифре. Новое рабочее число — 27. Нам опять требуется внести поправку.



Предыдущая цифра ответа — 2. Умножаем ее на цифру единиц исходного делителя. 2 на 1 будет 2, 27 минус 2 равно 25. Делим 25 на 3, получая в ответе 8 с остатком 1.



Умножаем последнюю полученную цифру ответа (8) на цифру единиц (1) в делителе и в ответе имеем 8. Вычтем 8 из нового рабочего числа (10). 10 минус 8 равно 2. 2 на 3 разделить нельзя. Значит, следующая цифра ответа равна 0.

Это дает нам ответ с точностью до одного знака после запятой.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно. Если хотите, можете решать столбиком. Попробуйте решить некоторые примеры в уме и запишите полученный ответ.

а) 368: 71 = _; б) 236: 43 = _; в) 724: 61 = _; г) 549: 61 = _; д) 1234: 41 = _

Ответы:

а) 5,18; б) 5,488; в) 11,869; г) 9; д) 30,09756

Способ округления в сторону увеличения

Если цифра в разряде единиц в делителе велика, можно

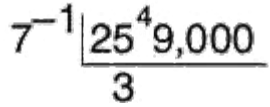
следовать видоизмененной процедуре.

Например:

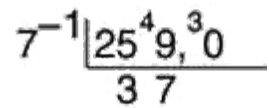
2590: **69** =

Заменяем 69 на 70 — 1.

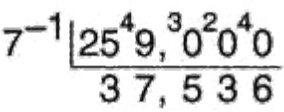
Делим на 10, а потом на 7, внося поправки по ходу.



25 делится на 7 три раза (3 х 7 = 21) с остатком 4. Приписываем 4, как и прежде, к следующей цифре делимого, что дает нам рабочее число 49. Теперь умножаем полученную цифру ответа (3) на 1, которую мы рассматриваем цифрой единиц в делителе. В ответе получаем 3. Прибавляем его к рабочему числу и получаем 52. Разделив 52 на 7, получим 7 с остатком 3. Записываем 7 и переносим 3. Получаем новое рабочее число: 30.



Теперь умножим последнюю полученную цифру ответа (7) на 1, что даст нам 7. Прибавим 7 к 30 и получим 37. 37, деленное на 7, дает 5 с остатком 2. Записываем 5 следующей цифрой и переносим 2. Получили рабочее число 20. Прибавим к нему 5 х 1 = 5 и получим 25. 25, деленное на 7, равно 3 с остатком 4. Переносим 4 и получаем новое число 40. Прибавляем к нему 3, получаем 43. 43, деленное на 7, дает 6 — это следующая цифра нашего ответа. Можно продолжать до любого количества знаков после запятой. Решение до трех знаков после запятой выглядит следующим образом:



Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 2671: 41 = _; б) 3825: 58 = _; в) 3825: 62 = _; г) 2536: 39 = _

Ответы:

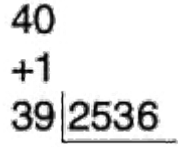
а) 65,146; б) 65,948; в) 61,69; г) 65,0256

Если вы округляете исходный делитель в сторону увеличения, получая вспомогательный делитель, то корректирующую величину следует **прибавлять** к рабочему числу. Если же вы округляете исходный делитель в сторону уменьшения, то корректирующую величину следует **вычитать** из рабочего числа.

Запомнить, следует ли прибавлять или вычитать корректирующую величину, помогает следующий способ: представьте, что вам надо разделить 15 подарков на 9 или 11 человек. В каком случае в результате деления получится больший остаток? Если бы вы делили на 10, то вам пришлось бы прибавить 1, корректируя ответ, полученный от деления на 9. В другом же случае вы вычитали бы 1, чтобы скорректировать ответ, полученный от деления на 11.

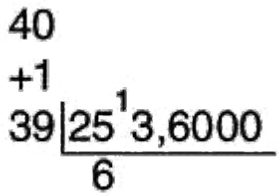
Укажу на трудность, возникающую при использовании данного метода, и объясню, как с ней можно справиться.

Вычислим 2536: 39. Вот таким образом я записываю условие задачи:

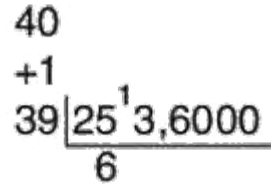


Я записываю делитель (39), затем +1 над ним, чтобы получить наш рабочий делитель 40. (Знак «плюс» говорит о том, что необходимо прибавить 1, умноженное на последнюю полученную цифру ответа.)

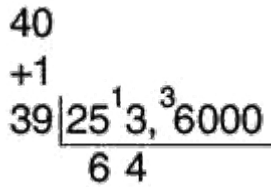
Чтобы разделить на 40, делим сначала на 10, а потом на 4. 2536, деленное на 10, дает 253,6. Теперь разделим на 4, внося по ходу вычислений поправки.



25 делится на 4 шесть раз с остатком 1. Переносим 1 к следующей цифре (3), что дает нам 13.

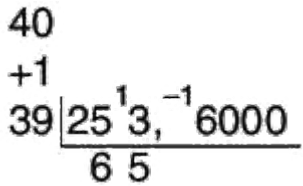


Теперь внесем поправку. 6 на +1 дает +6. Прибавим 6 к нашему рабочему числу 13 и получим 19. 19, деленное на 4, дает 4 с остатком 3. Записываем в ответ 4 и перенесем 3, получая 36 в качестве следующего рабочего числа.



4, умноженное на +1, дает +4. 36 плюс 4 равно 40. 40, деленное на 4, будет 10.

Теперь мы столкнулись с проблемой. 10 не годится для ответа, поэтому мы делаем вывод, что предыдущая полученная цифра была слишком малой. Повышаем ее с 4 до 5.



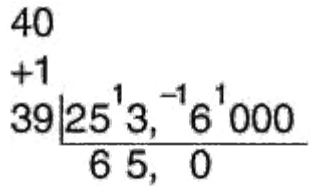
19 делится на 4 пять раз с остатком —1.

(Иными словами, 5 x 4 = 20. 19 — рабочее число; оно равно 20 — 1.)

Когда переносим 1 к следующей цифре, эта единица представляет собой число 10. (2 представляет 20, 3 представляет 30 и т. д. Иными словами, мы умножаем переносимую цифру на 10.)

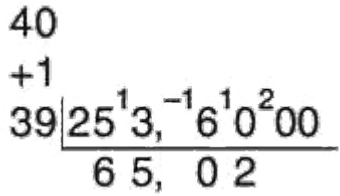
Умножим последнюю цифру ответа (5) на +1, получаем +5. Следующим рабочим числом является 1: 6 (помним о —10) плюс 5, то есть 11, минус 10.

1 делится на 4 нуль раз с остатком 1.



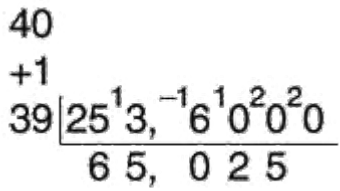
Следующим рабочим числом будет 10. 10 плюс 0, а затем умноженное на +1, дает 10.

10 делится на 4 два раза с остатком 2.



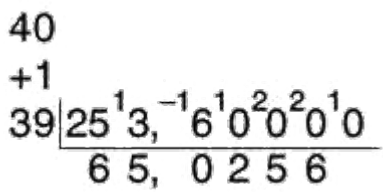
Наше рабочее число теперь 20. Имеем: (20 + 2) x 1 = 22.

22, деленное на 4, дает 5 с остатком 2.



Очередным рабочим числом является 20: (20 + 5) x 1 = 25.

25, деленное на 6, дает 4 с остатком 1.



10 плюс 6 равно 16. 16 при делении на 4 дает 4. Видим, что полученный ответ — 65,0256 — точен до 4 десятичных знаков.

Когда в одном месте получилось 10 в результате деления рабочего числа на рабочий делитель, мы поняли, что нужно увеличить последнюю цифру ответа на 1. Затем мы получили отрицательный остаток, подлежащий переносу, который должен, по идее, быть увеличен в 10 раз (поскольку остаток переносится из более высокого разряда). Не прибавляйте этот остаток к

очередной цифре делимого вплоть до того (а точнее, не вычитайте, поскольку речь идет об отрицательном числе), как вы умножили последнюю полученную цифру ответа на корректирующий множитель и прибавили полученное число к текущей цифре делимого, так как всегда легче вычесть в конце число, кратное 10, чем вычесть его в начале, а затем работать с отрицательными числами.

Деление на трехзначные числа

Деление на трехзначное число аналогично делению на двузначное. Например:

45678: **321** =

Оформляем решение примера так же, как в случае деления на двузначное число.

321| **45678**

Прежде всего делим на 300. Для этого сначала делим на 100, а потом на 3.

Деление на 100 подразумевает перенос десятичной запятой на две позиции влево. Это дает нам число 456,78.

Теперь делим на 3 и вносим поправки по ходу решения.

4 при делении на 3 дает 1 с остатком 1, поэтому 1 — это первая цифра нашего ответа. Записываем 1 под цифрой 4 делимого. Остаток 1 переносим к следующей цифре, что дает нам рабочее число 15.

$$\begin{array}{r|l} 321 & 4^{1}56{,}78 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Теперь умножим наш ответ (1) на вторую цифру делителя (2). 1 на 2 равно 2. Вычитаем 2 из нашего рабочего числа (15) и получаем 13. Теперь делим 13 на 3. 13 при делении на 3 дает 4 с остатком 1. 4 — это следующая цифра ответа. Переносим остаток, как обычно, и получаем новое рабочее число 16.

$$\begin{array}{r|l} 321 & 4^{1}5^{1}6{,}78 \\ \hline 1\ 4 & \end{array}$$

Теперь умножим последнюю цифру ответа (4) на вторую

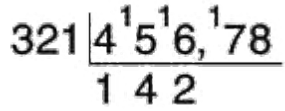
цифру делителя:

4 x 2 = 8

Также умножим предыдущую цифру ответа (1) на третью цифру делителя (1). Сложим эти два числа (8 + 1 = 9) и вычтем сумму из рабочего числа. Нашим рабочим числом является 16, поэтому: 16 — 9 = 7.

Разделим 7 на 3, чтобы получить следующую цифру в ответе. 7 при делении на 3 дает 2 с остатком 1.

Переносим остаток к следующей цифре (7) и получаем новое рабочее число 17.



Перемножим накрест две последние цифры ответа с двумя последними цифрами делителя. Затем сложим два полученных результата.

2 x 2 = 4

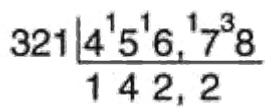
4 x 1 = 4

4 + 4 = 8

Вычтем 8 из нашего рабочего числа 17: 17 — 8 = 9. Теперь разделим 9 на 3.

Мы знаем, что нам нужен остаток для переноса к следующей цифре. Если мы ничего не перенесем, хватит ли нам величины самой цифры? Да, хватит, поскольку наше следующее перемножение цифр накрест и сложение результатов дадут в сумме 8 (8: 3 = 2 r2, затем 3 x 2 = 6, 2 x 2 = 4, 6 + 2 = 8), однако в этом случае не будет остатка для последнего шага. Поэтому уменьшим 3 до 2 и получим остаток 3.

9: 3 = 2 r3



Нашим следующим рабочим числом будет 38. Перемножаем накрест, а затем складываем результаты:

2 x 2 = 4

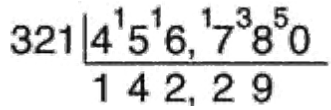
2 x 1 = 2

4 + 2 = 6

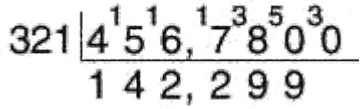
38 — 6 = 32

Делим 32 на 3 и получаем 9 с остатком 5. (Мы намеренно занизили целую часть, поскольку нам нельзя получить 10 в

качестве ответа — ответом должно быть только однозначное число.) Уже сейчас можно сказать, что нам придется вычитать достаточно большое число после перемножения накрест, поскольку одним из множителей является 9.



Наше текущее рабочее число — 50. Умножим накрест:
9 x **2** = **18**
2 x **1** = **2**
18 + **2** = **20**
50 – **20** = **30**
Делим 30 на 3 с остатком.
30: **3** = **9 r3**



Очередное рабочее число — 30. Умножаем накрест.

3 не делится на 3 с остатком, поэтому следующая цифра в ответе — 0.

Прервем решение на этом месте, получив в качестве ответа число 142,2990, являющееся точным до четвертого знака после запятой. Можно продолжить до любого знака, какого пожелаете.

Разве данный способ не проще стандартного деления в столбик?

Вот несколько примеров для самостоятельного решения:

Попробуйте решить свои собственные примеры, проверяя ответы с помощью калькулятора. В главе 16 мы познакомимся с методом для простой и быстрой проверки того, правильно ли мы решили задачу на деление.

9 x **2** = **18**
9 x **1** = **9**
18:**9** = **27**
30 – **27** = **3**
а) 7120: 312 = _; б) 4235: 213 = _
Ответы: а) 22,82; б) 19,88

Глава 15
Деление посредством сложения

Данный метод очень хорош для деления на числа, чуть меньшие по величине, чем 10, 100, 1000 и т. д., или такие, как 20, 300, 500 и т. д. Он также служит хорошей иллюстрацией того, что, по сути, представляет собой деление.

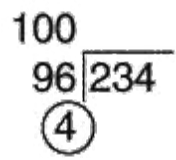
Сколько раз 9 делит 10? Один раз с остатком 1. Таким образом, для каждой десятки 9 разделит ее 1 раз и даст в остатке 1. Поэтому число 20 разделится на 9 два раза с остатком 2. Число 40 — четыре раза с остатком 4. И так для каждой десятки в составе числа.

Если у вас есть несколько долларов, вы можете купить что-нибудь за 90 центов за каждый доллар и получить 10 центов сдачи. Если у вас достаточно денег, вы можете купить что-то еще на накопившуюся сдачу. Это приводит нас к новому и легкому способу решения непростых задач на деление. Деля на 90 центов, поделите сначала на 100 (доллар) и возьмите сдачу.

Например, если бы вы покупали напиток за 95 центов, а у вас в кармане есть 1,20 доллара, вы дали бы продавцу доллар, оставив в кармане 20 центов. Плюс к этому вы получили бы 5 центов сдачи, поэтому от покупки у вас осталось бы 25 центов, или, как мы сказали бы, ваш остаток составил бы 25 центов.

Таким образом, можно сказать, что при делении 120 на 95 получается 1 с остатком 25.

Рассмотрим пример:

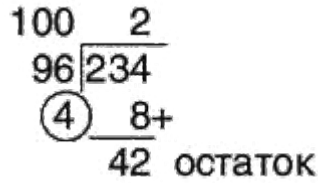


Мы делим 234 на 96. Записываем решение привычным образом, однако рисуем кружок под 96 и вписываем в него 4. (На сколько 96 меньше 100?)

Теперь, вместо того чтобы делить на 96, делим на 100. Сколько раз 100 содержится в 234? Два раза с остатком 34. Записываем 2 как первую цифру ответа.

Остаток 34 необходимо сложить с остатком 4 с каждой сотни. В нашем случае у нас две сотни, поэтому наш остаток равен 2 x 4, то есть 8, плюс ранее полученный остаток 34, что в сумме дает

нам 42 в качестве общего остатка.



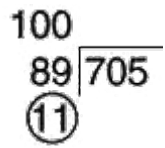
Речь идет о том, что 234 делится на 100 дважды и остаток составляет 34. Поскольку на самом деле мы делим на 96, нам необходимо учесть остаток 4 с каждой сотни, на которую делится исходное число.

Если бы мы покупали вещи по цене 96 центов и имели при этом 2,34 доллара в кармане, то отдали бы продавцу 2,00 доллара и оставили бы в кармане 34 цента. Мы к тому же получили бы 8 центов сдачи, которые в сумме с имеющимися 34 центами дали бы 42 цента.

Разберем еще один пример:

705: **89** =

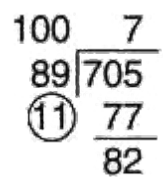
Записываем условие задачи:



89 на 11 меньше 100, поэтому записываем 11 под делителем.

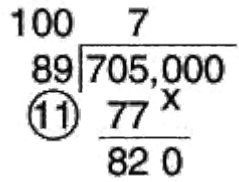
Сколько сотен содержится в 705? Очевидно, что 7, поэтому записываем в ответ 7.

Каков наш остаток? На каждую сотню остаток составляет 11. Сотен у нас 7, поэтому остаток равен 7 х 11, то есть 77. К 77 надо приплюсовать 5, что осталось от 705, и это дает нам 82 (77 + 5 = 82).



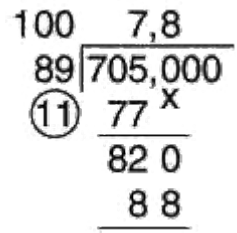
Опять заметим, что сотни мы больше не трогаем, а имеем дело только с остатком 5.

Вычислим ответ с точностью до двух знаков после запятой.

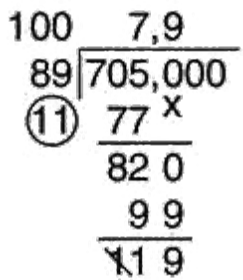


Теперь делим 820 на 89.

Мы имеем 8 сотен, поэтому 8 — следующая цифра ответа. 8, умноженное на 11, дает 88.



88 плюс 20 (что осталось от 820) равно 108 — это суммарный остаток. Он очевидным образом слишком велик, поскольку превышает наш делитель, поэтому увеличим последнюю полученную цифру ответа на 1. Теперь решение выглядит следующим образом:



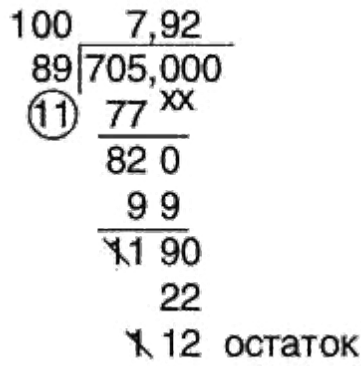
Поскольку нам пришлось увеличить цифру ответа на единицу, вычтем один раз рабочий делитель (100) из нашего остатка. Вычеркнем единицу из разряда сотен в остатке и получим настоящий остаток: 19.

Сносим нуль сверху и получаем 190.

Видно, что 89 делит 190 дважды, поэтому просто записываем 2 в качестве следующей цифры ответа. (90 в составе 190 уже больше, чем наш делитель.)

(Если для вас не очевидно, что в ответ надо записать 2, вы могли бы записать 1 в качестве следующей цифры, помня о том,

что хотя бы одна сотня содержится в 190. 1 на 11 равно 11, которое мы должны прибавить к 90, оставшемуся от 190, и в результате получим 101. Поскольку делитель равен 89, а мы не можем иметь остатка 101, превышающего его, этот вариант следует отбросить, а взять в качестве следующей цифры ответа 2.)



Поскольку мы увеличили последнюю цифру ответа на 1, вычитаем 100 x 1 из остатка. 112 минус 100 дает 12. Сносим последний нуль и получаем 120.

120 делится на 89 единожды, что позволяет нам получить в ответе 7,921. Поскольку ответ нам нужен с точностью до двух десятичных знаков, можно округлить до 7,92. Всю задачу можно было без труда решить в уме.

Попробуйте решить следующие примеры в уме, получив целую часть ответа и остаток.

а) 645: 98 = _; б) 2345: 95 = _; в) 234: 88 = _; г) 1234: 89 = _

Ответы

а) 6 r57; б) 24 r65; в) 2 r58; г) 13 r77

Легко, не правда ли?

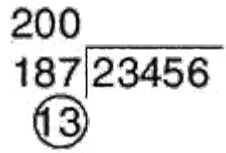
Данный метод хорошо применять, когда речь идет о делении на числа чуть меньше 100, 1000 и т. д. или числа, кратные 100, 1000 и т. д., но может использоваться и в случае деления других чисел.

Деление на трехзначное число

Пример:

23456: **187** =

Записываем задачу как обычно:

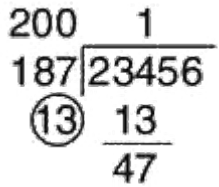


Используем рабочий делитель 200, поскольку 187 равно 200 минус 13.

Приступаем к расчетам. 234 делится на 200 один раз, поэтому первая цифра ответа будет 1. Записываем 1 над 5.

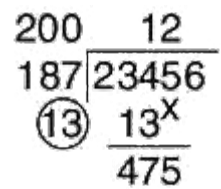
Умножаем полученную цифру ответа (1) на число в кружке (13) и получаем в результате 13. Записываем 13 под 234 и прибавляем к 34.

34 + 13 = 47



Сносим следующую цифру (5) к 47 и получаем 475.

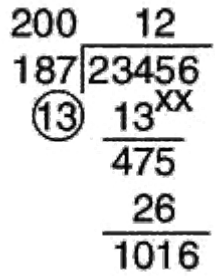
Делим 475 на 200. 400 делится на 200 дважды, поэтому 2 — это следующая цифра ответа.



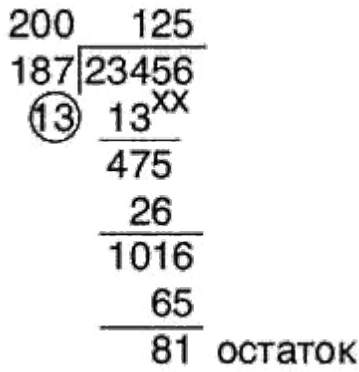
Умножаем 2 на 13 и получаем 26.

75 + 26 = 101

Сносим следующую цифру (6).



Делим 1016 на 200. 1000 делится на 200 пять раз, поэтому следующей цифрой в ответе будет 5. 5 х 13 равно 65. 65 плюс 16 равно 81 — это наш остаток.



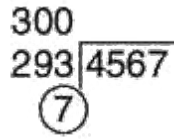
Наш ответ: 125 и 81 в остатке.

Бесспорно, гораздо легче умножать 13 на каждую цифру ответа, чем то же самое делать с числом 187.

Следующий пример показывает, как поступать, когда вы получаете остаток, выполняя деление на рабочий делитель.

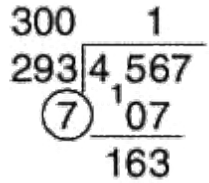
4567: **293** =

Задача в начальном виде выглядит так:



Делим 400 на 300, получая 1 с остатком 100. Я обычно обозначаю переносимый остаток маленькой единичкой.

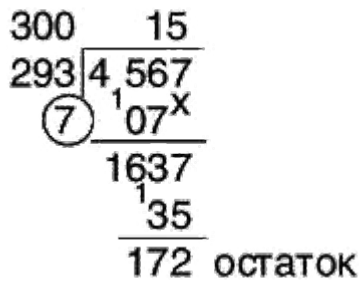
1 на 7 равно 7, поэтому прибавляем 7 к 56. К этому следует приплюсовать 100, наш предыдущий остаток, и в итоге получаем суммарный остаток (163).



Сносим следующую цифру делимого. Теперь делим 1637 на 300.

1600 делится на 300 пять раз, остатком является 100. Выполняем ту же процедуру.

37 плюс 135 дает остаток 172. При решении данного примера нам пришлось дважды переносить остаток.

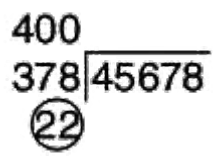


Рассмотрим еще один пример:

45678: 378 =

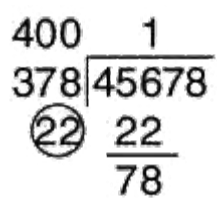
378 на 22 меньше 400, поэтому наш метод может быть с успехом применен.

Записываем задачу принятым нами способом:



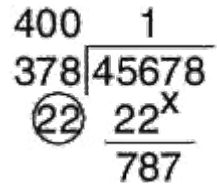
Используем 400 в качестве рабочего делителя.

Первое вычисление не представляет труда. 465 делится на 400 один раз.

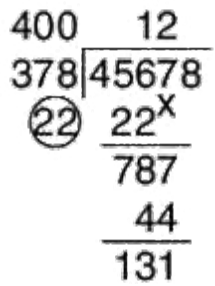


22, умноженное на 1, дает 22. Прибавляем 22 к 56 и получаем 78.

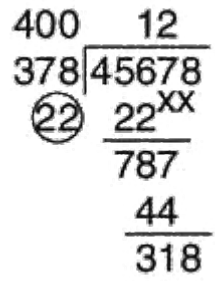
Сносим следующую цифру делимого (7).



401 содержится в 787 один раз, однако 787 — это почти 800, и к тому же мы ведь на самом деле делим не на 400, а на 378. Можно предположить, что результатом деления является 2. Давайте проверим это.

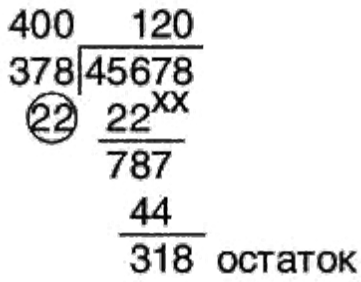


2 на 22 равно 44. 87 плюс 44 дает 131. Вычтем 100 (получив 31), поскольку мы прибавили 1 к очередной цифре ответа, записав 2 вместо 1. Речь идет о том, что мы просто нашли разность от вычитания 378 дважды из 787. Ответом должно быть число, которое меньше 100. Теперь снесем вниз следующую цифру (8).



400 не делит 318 с целой частью, большей 0. Проверим, как насчет нашего настоящего делителя. 318 не делится и на 378,

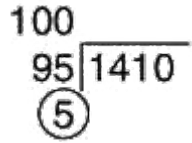
поэтому берем в качестве очередной цифры в ответе 0, а 318 становится остатком.



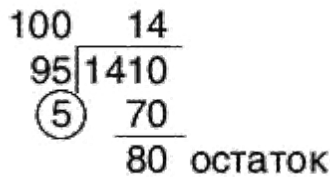
А как бы мы решали такую задачу?

1410: **95** =

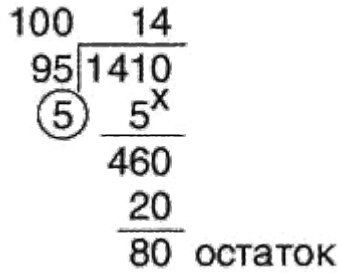
Используя рассматриваемый метод, ее можно решить двумя способами. Сначала рассмотрим решение первым способом.



Можно спросить себя: «Сколько раз тысяча четыреста делится на сто?» 14 раз. Записываем 14 в качестве ответа. Теперь займемся остатком. 14, умноженное на 5, дает 70. (14 на 2 дает 7. 5 на 2 равно 10, 10 умножить на 7 будет 70.) 70 плюс остаток от 1410 (10) дает 80. Ответ: 14 с остатком 80.



Второй способ:



141 делится на 100 один раз с остатком 41.

1 на 5 равно 5, плюс остаток 41 — получаем 46. Сносим следующую цифру делимого (0), что дает нам 460.

460 делится на 100 четыре раза с остатком 60. 4 на 5 равно 20, плюс остаток 60 — равно 80 (остатку).

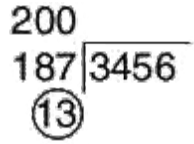
Первый способ легче и удобнее для вычислений в уме, не так ли? Попробуйте решить пример обоими способами в уме и сравнить, какой из них легче.

Возможные осложнения

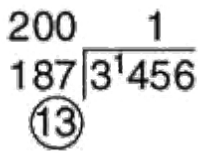
Приведу интересный пример, демонстрирующий возможные проблемы при использовании метода:

3456: **187** =

Оформляем как обычно:

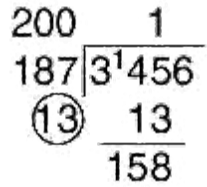


Делим 300 в составе 345 на 200. Ответом служит 1 с остатком 100. Записываем это в таком виде:



Ставим единичку над цифрой сотен (3 — это цифра в разряде сотен числа 345), которая обозначает полученный нами остаток 100.

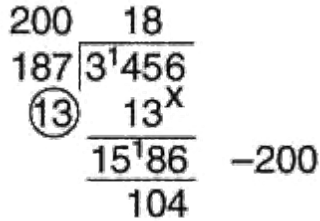
Теперь умножим: 1 х 13 = 13. Прибавляем результат к 45, что осталось от 345, а также приплюсовываем 100 — переносимый остаток.



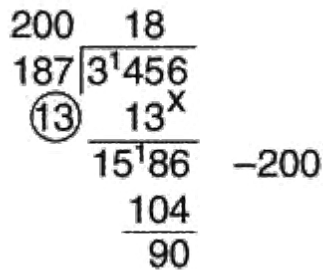
Этим мы подразумеваем следующее: если у нас имеется в кармане 345 долларов и мы покупаем что-нибудь за 187 долларов, то можем дать 200 долларов продавцу и оставить 145 долларов в кармане. Нам дадут еще 13 долларов сдачи, и вместе с деньгами, оставшимися в кармане, теперь у нас окажется 158 долларов.

Сносим цифру 6. Теперь нам нужно разделить 1586 на 200.

1500 делится на 200 семь раз с остатком 100. Не забудьте сделать поправку по поводу данного остатка в виде единички в разряде сотен. Можно видеть, что остаток получится большой: 7 x 13, плюс 186, что осталось от 1586. Поэтому увеличиваем цифру в ответе на 1, получая 8 вместо 7. Произведение 8 x 13 посчитать легко: 8 на 10 равно 80, плюс 8 x 3 = 24 — получаем в итоге 104.



Поскольку дополнительная единица, которую мы прибавили к цифре ответа, соответствует еще 200 в качестве делителя, нам следует вычесть их из остатка. Припишем — 200 справа от решения в напоминание об этом.

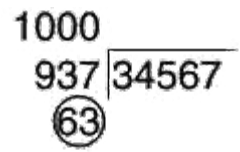


Прибавляем 186 к 104 и получим 290. Теперь вычтем из этой

суммы записанные справа 200 и получим наш окончательный остаток 90. Процедура, описанная выше, простой не кажется, однако после некоторой тренировки вы обнаружите, что на самом деле все совсем несложно. Главное — это внимательно следить за собственными действиями и отдавать себе отчет в том, что вы делаете на каждом шаге. Попробуйте решить несколько аналогичных примеров, и накопленный опыт не преминет сказаться.

Можем ли мы использовать данный способ, чтобы разделить 34567 на 937? Хотя 937 расположено недалеко от 1000, разница все равно больше, чем раньше, — поэтому умножение на такое число легким не назовешь.

Попробуем решить эту задачу.

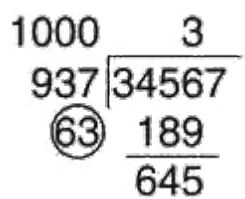


Первым шагом будет разделить 3000 на 1000. Ответом, очевидно, является 3. Это первая цифра нашего ответа.

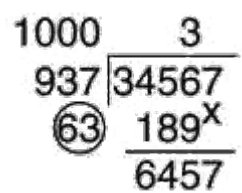
Теперь нам необходимо умножить число в кружке на 3.

3, умноженное на 60, дает 180 и 3 на 3 будет 9; ответ, таким образом, равен 189. Записываем 189 под 3456 и прибавляем его к 456, чтобы получить остаток.

456 + 189 = 645



Сносим следующую цифру (7).



Теперь нам необходимо разделить 6457 на 1000.

6000 при делении на 1000 дает 6. Теперь умножим 63 на 6. Трудная ли это задача? Нет. 6 на 60 дает 360 и плюс 3 x 6 = 18 — получаем 378.

Прибавим это к 457 и получим наш остаток 835.

```
1000    36
 937|34567
 (63) 189x
     6457
      378
      835  остаток
```

Итак, 34567, деленное на 937, дает 36 с остатком 835. Продолжим деление до получения ответа с двумя знаками после запятой.

```
1000    36
 937|34567,000
 (63) 189x
     6457
      378
      835
```

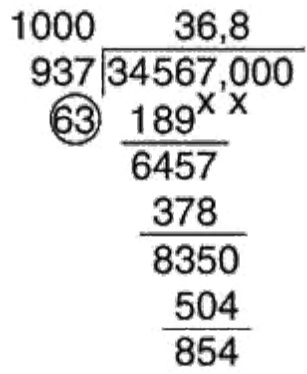
Добавляем на один нуль после запятой больше, чем требуется для ответа.

Сносим первый нуль и получаем 8350. Сколько раз 1000 содержится в 8000? Восемь, поэтому 8 — это следующая цифра ответа.

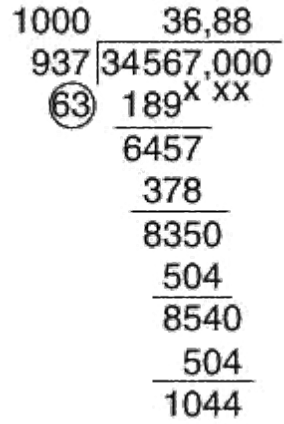
```
1000    36,8
 937|34567,000
 (63) 189x x
     6457
      378
     8350
```

8, умноженное на 63, дает 504. (8 на 60 равно 480 и 8 на 3 равно 24. 480 плюс 24 дает 504.)

350 + 504 = 854

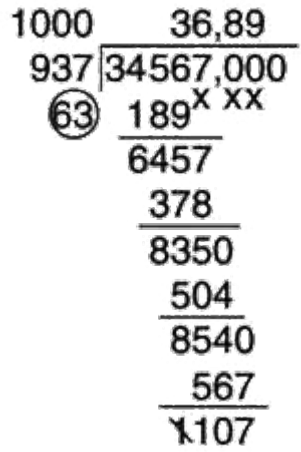


Снесем следующую цифру (0), это даст нам 8540, затем разделим 8540 на 1000, в результате чего получим опять 8. Мы уже знаем, что произведение 8 x 63 дает 504, поэтому прибавим последнее число к 540 и получим 1044.



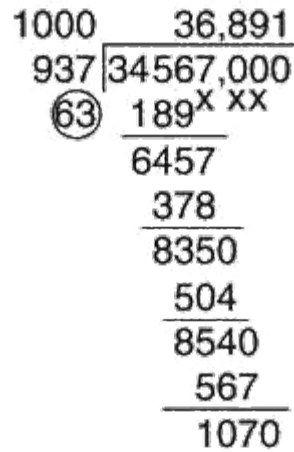
Здесь явно что-то не так, потому что мы получили остаток, который больше, чем делитель. Поэтому нам необходимо увеличить последнюю цифру ответа на 1. Вычеркиваем последнюю цифру (8) и заменяем ее на 9. Произведение 9 x 63 равно 567. (9 x 60 = 540, 9 x 3 = 27 и 540 + 27 = 567.)

540 + 567 = 1107



Мы вычитаем 1000, поскольку увеличили последнюю цифру ответа на 1. Снесем последний нуль, чтобы вычислить третью цифру после запятой в ответе. 1070 делится на 1000 один раз. Это дает нам следующее число в ответе: 36,891. Нам нужен ответ с точностью до двух десятичных знаков: округление 36,981 до двух знаков дает 36,98. Задача решена.

Опять заметим, что гораздо легче перемножать 63 с каждой цифрой нашего ответа, чем то же самое делать с 937. Полное решение выглядит следующим образом:



Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно: сначала в виде целой части и остатка, а потом с точностью до одного знака после запятой.

а) 456: 194 = _; б) 6789: 288 = _; в) 5678: 186 = _; г) 73251: 978 = _

Если вы столкнулись с проблемами, привожу полное решение

каждого примера.

а)

```
200   2
194|456
 (6) 12
     68  остаток
```

```
200   2,35
194|456,00
 (6) 12 xx
     680
      18
     980
      30
      10  остаток
```

Ответом с точностью до одного знака после запятой является 2,4.

б)

```
300   23
288|6789
(12) 24 x
     1029
       36
      165  остаток
```

```
300   23,57
288|6789,00
(12) 24 x xx
     10 1 29
       36
     16 1 50
        60
      2100
        84
        84
```

Ответом с точностью до одного знака после запятой является 23,6.

в)

```
200   30
186|5678
(14) 42 x
     098  остаток
```

```
200   30,52
186|5678,00
(14) 42 x xx
     0980
       70
     5 1 00
       28
      128
```

Ответом с точностью до одного знака после запятой является 30,5.

Чтобы умножить на 14, мы просто умножаем на 7, а затем удваиваем ответ (2 x 7 = 14).

г)

```
1000    74
978|73251
(22) 154x
     4791
       88
     879  остаток
```

```
1000    74,89
978|73251,00
(22) 154x xx
     4791
       88
     8790
      176
     9660
      198
      858
```

Ответом с точностью до одного знака после запятой является 74,9.

В данном примере нам пришлось умножать на 22. Это легко сделать, если вспомнить, что 22 = 2 x 11. Не составляет труда умножать на 2 и 11, если использовать известные нам приемы умножения. Например, нужно умножить на 22 число 8. Умножаем 8 сначала на 2, а потом на 11.

8 x **2** = **16**

16 x **11** = **176**

При делении на 19, 29 или 39, возможно, лучше применять метод прямого деления, однако, когда делитель чуть меньше 100, 200, 400 или 1000, вы можете счесть более удобным только что рассмотренный метод.

Вы должны быть в состоянии без труда решать в уме такие примеры, как 1312: 96. Речь в данном случае шла бы о делении на 100 — 4. 1300 при делении на 100 дает 13, поэтому вы могли бы сказать про себя почти без пауз и задержек: «Тринадцать и четыре на остаток тринадцать, плюс двенадцать, то есть тринадцать с остатком шестьдесят четыре».

Затем, если вы хотите получить ответ с точностью до одного знака после запятой, умножим остаток 64 на 10 и вновь разделим на 96. 640 при делении на 96 дает 6 с остатком 40 + 24 = 64. Ясно, что так можно продолжать до бесконечности, поэтому можно получить ответ с любым количеством знаков после запятой. Например, ответом с точностью до трех знаков после

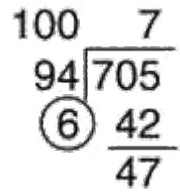
запятой будет 13,667.

В завершение настоящей главы давайте сравним рассмотренный здесь метод с обычным делением в столбик.

Например:

705: **94** =

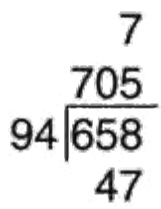
Решаем методом сложения:



Сколько раз 100 содержится в 705? Семь раз.

Теперь умножим 7 на 6 и прибавим ответ к 5 (в 705), чтобы получить наш остаток. Не представляет труда перемножить 7 и 6, а затем прибавить 42 к 5.

Теперь сравним это со стандартным делением в столбик.



Сколько раз 94 содержится в 705? Семь раз.

Теперь мы должны умножить 7 на 94 — получаем 658. Затем вычитаем 658 из 705, чтобы получить наш остаток.

Метод, рассмотренный в настоящей главе, предлагает более простое решение, не так ли?

Глава 16
Проверка ответов: часть вторая

Можно использовать изученный ранее метод выбрасывания девяток для проверки ответов в задачах на деление.

Например, мы захотели проверить, дает ли 42, деленное на 2, 21. Проверим это путем выбрасывания девяток. Во-первых, необходимо вычислить числа-подстановки:

42: 2 = 21

6: 2 = 3

Данный пример совершенно тривиален и пояснений не требует. Рассмотрим следующую задачу:

161: 7 = 23

8: 7 = 5

Здесь нужно выбрать подход, напоминающий тот, что мы использовали в примерах на вычитание. Простой способ проверить ответ в задаче на деление — это умножить ответ на делитель и посмотреть, получим ли мы в результате делимое. Поэтому записываем последнее равенство следующим образом:

8 = 5 x 7 или **7 x 5 = 8**

Итак, можно ли сказать, что наш ответ верен, имея в виду, конечно, что речь идет о числах-подстановках?

5 x 7 = 35 и **3 + 5 = 8**

Да, наш ответ верен.

А если бы нам нужно было проверить, правильно ли мы решили пример, в ответе которого получается остаток? Как бы мы проверяли ответ, например, в следующей задаче:

165: 7 = 23 r4

Не допустили ли мы ошибки? Выбрасывание девяток позволяет определить наличие ошибок в большинстве случаев, освобождая нас от необходимости повторно решать пример.

При использовании метода выбрасывания девяток в примерах на деление мы преобразуем задачу в пример на умножение. Однако что нам делать с остатком? Мы учитываем его следующим образом:

23 x 7 = 165 — 7

Мы вычитаем остаток из делимого. Объясняется это так: при делении одного числа на некое другое мы получили остаток 4. Если бы исходное число было меньше на 4, тогда остатка мы не получили бы вовсе.

После трансформации в числа-подстановки мы получаем уравнение:

5 x 7 = **3 – 4**

Остаток (4) больше, чем ответ (3), поэтому нужно либо сначала закончить сложение на предыдущем шаге (165 — 4 = = 161), либо прибавить 9 к числу, из которого мы теперь вычитаем (3). В обоих случаях мы получаем:

5 x **7** = **8**

35 = **8**

8 = **8**

Итак, наш ответ верен.

Однако следует сделать одно важное замечание:

> Нельзя использовать способ выбрасывания девяток в отношении примеров на деление, в которых ответом является число, округленное до определенного количества знаков после запятой. Выбрасывание девяток работает только для проверки точных ответов.

Проверьте ответы в решенных ниже примерах посредством выбрасывания девяток:

а) 248746: 721 = 345 r1; б) 36679: 137 = 26722; в) 6054: 17 = 356 r2; г) 3283: 49 = 67

Ответы: а), в) и г) — примеры с правильным ответом;

б) пример с неправильным ответом.

Выбрасывание одиннадцати

Выбрасывание одиннадцати — это еще один простой способ проверить полученный ответ. Его преимущество перед выбрасыванием девяток в том, что он позволяет определить, не была ли десятичная запятая ошибочно поставлена не в том месте и нет ли лишнего или, наоборот, недостающего нуля. Особую пользу он приносит в качестве дополнительной проверки к выбрасыванию девяток. Когда я умножаю на число, кратное 11 (например, 66 или 77), то использую этот метод вместе с выбрасыванием девяток.

Теперь я покажу вам два простых способа нахождения остатка от деления на 11 (выбрасывания одиннадцати).

> Очень простое правило для нахождения остатка действует в случае двузначных чисел: просто отнимите цифру десятков от цифры единиц. Если цифра единиц меньше цифры десятков, тогда прибавьте к ней сначала

11.

Например:

13 x **14** = **182**

Первое число у нас 13. Вычтем 1 (цифру десятков) из 3 (цифры единиц) и получим в ответе 2. Таким образом, 2 является нашим остатком.

Второе число (14) имеет остаток 3 (4–1 = 3) после выбрасывания одиннадцати.

Для нахождения остатка у числа с большим количеством знаков:

> Отметьте цифры, расположенные на четных местах, с первой цифры до десятичной запятой (в случае целых чисел — начиная с первого числа справа). Отнимите цифры на четных местах от цифр на нечетных.

Чтобы найти остаток от выбрасывания одиннадцати для числа 182, отмечаем цифры на четных местах.

1 8 2

*

8 — это вторая цифра справа. Цифрами на нечетных местах являются 1 и 2. Складывая их, получаем:

1 + 2 = 3

Нельзя вычесть 8 из 3, поэтому прибавим 11 к 3.

3 + 11 = 14

14 — 8 = 6

6 — это наше контрольное число.

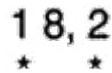
Числами-подстановками для 13 и 14 являются 2 и 3. Перемножая их, мы должны получить контрольное число:

2 x **3** = **6**

Результат совпадает с нашим контрольным числом, поэтому ответ мы получили верный.

Выбрасывание девяток позволило бы нам сделать проверку с меньшими усилиями. Зачем вообще выбрасывать одиннадцать? Если бы в ответе у нас получилось 18,2, а не 182, выбрасывание девяток не позволило бы определить ошибку, а выбрасывание одиннадцати позволило бы. Или, если бы нашим ответом являлось 1712 (в результате неправильного использования нами способа перемножения чисел больше 10, но меньше 20), выбрасывание девяток признало бы данный ответ верным. А выбрасывание одиннадцати и на этот раз показало бы наличие ошибки.

Давайте проверим оба упомянутых ответа путем выбрасывания одиннадцати:



Цифры на четных местах дают в сумме 3 (1 + 2 = 3). Цифра на нечетном месте — 8. Остатком является 5 (8 – 3 = 5).

Задача превращается в:

2 x 3 = 5

Это заведомо ложное утверждение.

Другим нашим неверным ответом являлось число 1712:

Суммируя цифры на четных местах (1 + 1), получаем 2. Цифры на нечетных местах (7 и 2) дают в сумме 9.

9 – 2 = 7

Если бы ответ был правильным, мы получили бы равенство и у чисел-подстановок. Однако мы опять получаем заведомо ложное равенство:

2 x 3 = 7

Выбрасывание одиннадцати позволило определить ложность ответов в обоих рассмотренных случаях, тогда как выбрасывание девяток привело бы нас к выводу, что ответы являются правильными.

Рассмотрим еще один пример:

1,3 x 14 = 18,2

В числе 1,3 цифра 1 находится на нечетном месте, являясь цифрой, от которой ведется отсчет, то есть первой, а цифра 3, соответственно, — на четном.

Вычитаем 3 из 1. Поскольку 1 меньше 3, прибавляем 11.

11 + 1 = 12

Теперь можно вычесть 3 из 12.

12 — 3 = 9

Вычитаем 1 из 4, чтобы узнать остаток для числа 14.

4 – 1 = 3

В ответе (18,2) цифры 1 и 2 находятся на четных местах, а цифра 8 — на нечетном.

1 + 2 = 3

8 – 3 = 5

Наша задача выглядит так:

9 x 3 = 5

9 на 3 — 27. Чтобы найти число-подстановку для 27, вычитаем 2 из 7.

7 минус 2 равно 5, что совпадает с нашим контрольным числом.

Если бы мы получили в ответе 1,82 или 182, выбрасывание девяток не позволило бы определить ошибку.

Найдите остаток от выбрасывания одиннадцати для следующих чисел:

а) 123; б) 5237; в) 716; г) 625174; д) 2156; е) 8137

Ответы:

а) 2; б) 1; в) 1 (12, затем 1); г) 0; д) 0; е) 8

Если вы не запомнили, как находить остаток от выбрасывания одиннадцати, вернитесь назад и перечитайте описание. Метод стоит потраченных усилий.

Теперь вы, вероятно, вполне в состоянии использовать метод на практике. Ниже вам предлагаются примеры для самостоятельного решения. Проверьте ответы.

а) 17 х 17 = 289; б)154 х 23 = 3542; в) 32 х 41 = 1312; г) 46 х 42 = 1942

Один из ответов является неправильным. Я не скажу вам какой. Замечу только, что выбрасывание девяток также позволит определить ошибку. Попробуйте выполнить двойную проверку.

Используя любой из описанных методов, будь то выбрасывание девяток или одиннадцати, я иногда предпочитаю выполнять дополнительную проверку, а именно — путем оценки приближенного значения, получаемого в ответе.

Все эти методы являются очень полезными, особенно если вы работаете с числами в школе или на рабочем месте.

Глава 17
Приближенное значение квадратного корня

При возведении числа в квадрат мы умножаем его на самого себя. Например, 4 в квадрате равно 16, поскольку 4, умноженное на 4, дает 16.

Нахождение квадратного корня — это процесс, обратный возведению в квадрат. Чтобы найти квадратный корень из числа 16, необходимо определить число, которое, будучи умноженным на самого себя, даст в результате 16. Ответом, разумеется, является 4. Подобным образом квадратным корнем из 25 является 5, поскольку 5 на 5 будет 25.

Каким будет квадратный корень из 64? Ответом служит 8, поскольку 8 x 8 = 64.

А как насчет квадратного корня из 56? Здесь задача потруднее, поскольку целого числа в качестве квадратного корня из 56 не существует. 7 на 7 дает 49, которое меньше, чем 56, а 8 на 8 будет 64, которое больше, чем 56. Ответ, таким образом, находится где-то между 7 и 8. Оценку величины квадратного корня мы проводим следующим образом. Выбираем то число, чей квадрат чуть меньше числа, с которым мы работаем — в данном случае 56, — и делим второе на первое.

В рассматриваемом случае берем 7, чей квадрат (49) чуть меньше 56. 8, к примеру, не годится на данную роль, поскольку его квадрат (64) больше, чем 56.

Теперь делим 56 на 7 и получаем в ответе 8.

Берем среднее между 7 и 8. Таким средним является 7,5. (Один из способов нахождения среднего для нескольких чисел состоит в том, чтобы разделить сумму этих чисел на их количество.) Данный ответ несколько превышает требуемый, что можно проверить несложным вычислением (7,5 x 7,5 = 56,25). Округление до 7,48 дает более высокую точность.

Рассматриваемый ответ (7,48) является точным до двух знаков после запятой. Наш первый ответ (7,5) является точным до одного знака после запятой. Очень часто такой точности вполне достаточно.

Для обозначения квадратного корня используют символ J~. Его ставят перед числом, из которого желают извлечь квадратный корень. У16 = 4 означает, что квадратный корень из 16 равен 4.

Рассмотрим пример:

√70 =

Прежде всего попытаемся угадать ближайшее число, являющееся округлением искомого корня.

√70 ~= 8 (8 x 8 = 64)

Разделим исходное число на полученное приближенное целое значение.

70: 8 = 8,75

Теперь разделим пополам разницу между первой оценкой (в данном случае числом 8) и результатом деления числа на его первую оценку, то есть 8,75. Разница равна:

8,75 — 8 = 0,75

Разделив пополам эту разницу, получим:

0,75: 2 = 0,375

И наконец, прибавим полученный результат к первоначальной оценке (8):

8 + 0,375 = 8,375

Полученный таким образом ответ всегда будет слегка больше требуемого, поэтому округлим его в сторону уменьшения. В данном случае возьмем в качестве требуемого округления 8,37. Данный ответ вычислен с ошибкой в пределах 0,2 процента.

Попробуем решить еще один пример. Как бы мы вычисляли квадратный корень из 29?

√29 =

Выбираем 5 в качестве первой оценки (5 x 5 = 25). Делим 29 на 5, с тем чтобы получить более точное приближенное значение.

29 делится на 5 пять раз с остатком 4. 40 (остаток 4, умноженный на 10) делится на 5 восемь раз без остатка. Получаем в результате деления 5,8.

29: 5 = 5,8

Разность между 5 и 5,8 равна 0,8. Половина от 0,8 равна 0,4. Прибавим это к 5 — нашей первой оценке искомого квадратного корня — и получим более точную оценку: 5,4.

Ответом является 5,385, однако 5,4 предоставляет точность до одного знака после запятой. Мы имеем ошибку величиной примерно в 0,2 процента. Такая точность является достаточной в большинстве случаев.

Попробуем решить еще один пример:

√3125 =

Разобьем число на пары цифр, начиная с крайней правой:

$$\sqrt{31\ 25} =$$

Каждой паре цифр в числе, из которого извлекается квадратный корень, соответствует одна цифра в целой части ответа.

В данном примере в ответе будет двузначное число, не принимая в расчет цифры после запятой.

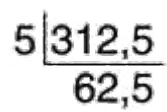
Если пара цифр является неполной, то есть когда цифр перед запятой, например, пять и у нас имеется две пары и одна (крайняя левая) цифра, эта единичная цифра приравнивается к паре.

Чтобы вычислить первую цифру в ответе, оценим квадратный корень из числа, образованного из первой пары цифр. Первым приближением квадратного корня из 31 служит 5 (5 х 5 = 25). Последующими цифрами в первом приближении квадратного корня у нас всегда будут нули. Так как в ответе нужна еще одна цифра, мы добавляем к 5 один нуль и получим 50 в качестве первого приближения корня.

Чтобы разделить на 50, делим сначала на 10, а потом на 5:

3125: 10 = 312,5

Теперь делим на 5 и получаем 62,5.



Найдем разницу и разделим ее пополам:

62,5 — 50 = 12,5

12,5: 2 = 6,25

Округляем в меньшую сторону до целого числа и прибавляем к первой оценке:

50 + 6 = 56

√3125 = 56 ОТВЕТ

Воспользовавшись калькулятором, получим:

√3125 = 55,9

Ответ, который мы получили расчетом, вычислен с ошибкой, не превышающей 0,2 процента. Если бы мы не округляли 6,25 до 6, ошибка все равно не превышала бы 1 процент.

Приведенные вычисления можно легко выполнить в уме. Вместе с тем большинство людей не умеют вычислять квадратные корни даже на бумаге.

Вычисления в уме

Решим следующую задачу в уме.

Чему равен квадратный корень из 500 (√500)?

Прежде всего разобьем число на пары цифр. Сколько пар у нас получается? Две (одна неполная). Поэтому в ответе будут две цифры.

Какая первая пара цифр? Речь идет всего об одной цифре: 5. Каков квадратный корень из 5? Берем 2, поскольку 2 x 2 = 4.

В качестве второй цифры берем 0. Наше первое приближение равно 20.

Теперь необходимо разделить 500 на 20. Как нам это сделать? Сначала разделим 500 на 10, а потом на 2.

500: 10 = 50

50: 2 = 25

Делим пополам сумму 25 и 20 — получаем 22,5. Округляем в меньшую сторону до 22,4.

Калькулятор дает ответ 22,36.

Наше приближение 22,5 дает ошибку в размере примерно 0,5 процента. Приближение после округления, равное 22,4, соответствует ошибке величиной в 0,2 процента.

Это очень хороший результат для вычисления в уме, особенно если мы примем во внимание, что единственный способ, известный большинству людей для вычисления квадратного корня, — это калькулятор. Вычисление квадратных корней в уме, вне всякого сомнения, обеспечит вам репутацию математически одаренной личности.

Попробуем решить еще один пример:

√93560

Разобьем цифры на пары:

$$\sqrt{9\ 35\ 60} =$$
$$\star\ \ \star\ \ \star$$

Первая пара является неполной — цифра 9. Квадратный корень из 9 равен 3 (3 x 3 = 9). Пар цифр всего три, поэтому приписываем к 3 два нуля, получая таким образом три цифры, сколько и должно быть в ответе. Наша первая оценка равна 300.

Чтобы разделить на 300, сначала делим на 100, а потом на 3. (Чтобы разделить на 100, переместите десятичную запятую влево на две позиции.)

93560: 100 = 935,60

$$3\overline{)935{,}60}\quad 311{,}86$$

311,86 — 300 = 11,86

11,86: 2 = 5,93, округляем до 5,9

300 + 5,9 = 305,9

Калькулятор дает ответ 305,8758. Ошибка нашей оценки составляет 0,0079 процента.

Решим с моей помощью еще один пример:

√38472148 =

Это выглядит очень внушительной задачей. Если бы мы решали этот пример в голове, можно было бы предварительно округлить число в меньшую сторону. Однако об этом после.

Для начала разобьем число на пары цифр:

$$\sqrt{38\ 47\ 21\ 48} =$$
$$*\quad *\quad *\quad *$$

Имеем четыре пары цифр, поэтому и в ответе будет четыре цифры.

Первая пара дает число 38. Оцениваем квадратный корень из 38 как 6, поскольку 6 x 6 = 36. Остальные позиции заполняем нулями. Наша оценка равна 6000.

Делим 38472148 на оценку. Сначала делим на 1000, а потом на 6:

38472148: 1000 = 38472,148

Поскольку мы вычисляем всего лишь приближенное значение, то можем отбросить знаки после запятой. Теперь разделим 38472 на 6:

38472: 6 = 6412

Делим пополам разницу между 6000 и 6412. Она равна 412, а ее половина — 206. (Половина от 400 равна 200, и половина от 12 равна 6.)

Прибавим 206 к нашей первой оценке и получим 6206. Округляем в меньшую сторону и получаем:

6200 ОТВЕТ

Фактический ответ, полученный с помощью калькулятора, равен 6202,59. Для практических нужд наше приближенное значение можно считать достаточно точным. Если же мы все-таки желаем получить точный ответ, тогда метод, который я представлю вашему вниманию в следующей главе, является самым простым из всех известных мне.

Пока же решите нижеприведенные примеры самостоятельно.

Попробуйте решить некоторые из них в уме.

а) √1723 = _; б) √2600 = _; в) √80 = _; г) √42 = _; д) √5132 = _; е) √950 = _; ж) √2916 = _; з) √1225 = _

Ответы:

а) 41,5; б) 50,99; в) 8,94; г) 6,48; д) 71,64; е) 30,82; ж) 54; з) 35

Когда число чуть меньше квадрата другого числа

Чем точнее мы подбираем приближение для квадратного корня, тем точнее будет окончательный ответ. Поэтому нам необходимо подбирать число в качестве приближения как можно ближе к истинному значению квадратного корня.

В примерах, которые мы только что разобрали, числа были чуть больше квадрата числа, выбранного нами в качестве первого приближения. Так, в одном из примеров для самостоятельного решения 2600 являлось чуть больше 50 в квадрате (2500), и мы использовали 50 в качестве первой оценки.

Ниже рассматривается случай, когда исходное число чуть меньше квадрата числа — первого приближения. Для получения более точного ответа, вместо того чтобы выбирать в качестве первого приближения число с квадратом, меньшим исходного числа, можно выбирать число, у которого квадрат больше исходного числа (при условии, конечно, что это приведет нас к более точному ответу).

Например:

√2400 =

Разобьем число на пары цифр:

$$\sqrt{24\ 00} =$$
$$\ast \quad \ast$$

Выбираем в качестве приближения квадратного корня из 24 число 5, поскольку 24 ближе к квадрату 5 (25), чем к квадрату 4 (16). Таким образом, нашим первым приближением квадратного корня из 2400 является 50.

Теперь делим 2400 на 50. Чтобы разделить на 50, делим сначала на 100, а потом удваиваем полученный ответ (50 = 100: 2).

2400: 100 = 24

24 x 2 = 48

Разделим пополам разницу между 48 и 50.

50 – 48 = 2

2: 2 = 1

Прибавление 1 к 48 дает наш ответ: 49.

Калькулятор дает следующее значение искомого корня: 48,98979. Наша ошибка составила примерно 0,02 процента.

Разберем еще один пример:

√6300 =

Разобьем попарно цифры:

$$\sqrt{63\ 00} =$$

Наше приближение для первой пары цифр равняется 8, поскольку 63 гораздо ближе к 8 в квадрате (64), чем к 7 в квадрате (49). Итак, наше первое приближение для корня из числа 6300 равно 80.

Делим сначала на 10, потом на 8:

6300: 10 = 630

630: 8 = 78,75

Теперь найдем среднее между 78,75 и 80. Можно вычесть 78,75 из 80, взять половину ответа и вычесть ее из 80.

Есть хорошая новость: имеется более короткий путь!

Короткий способ

Речь идет о нахождении среднего значения для двух чисел.

Чтобы найти такое среднее для 78,75 и 80, сложим их (158,75) и разделим сумму пополам.

Короткий способ состоит в следующем. Мы знаем, что ответ является «семьюдесятью с чем-то», поэтому 7 — это первая цифра ответа. Теперь припишите 1 слева от 8,75 (получая 18,75) и делите пополам. Никаких операций сложения и вычитания больше не потребуется.

Половина от 18 — это 9. Припишите 9 справа к 7 и получите 79. Половина от 75 — это 35,5. Ответом, таким образом, является 79,375. Округляем в меньшую сторону и получаем 79,37.

Фактическим ответом является 79,3725, и это означает, что наша ошибка составила 0,003 процента. Если бы мы использовали в качестве первой оценки число 70, нашим ответом являлось бы 80.

Чем обусловлен этот короткий способ? Чтобы найти среднее

для двух чисел (78,75 и 80), мы должны сложить их и взять половину от суммы:

78.75 + 80 = 158,75

158,75: 2 = 79,375

Разделив 15 на 2, мы получаем в ответе 7 и переносим остаток 1 к цифре 8, получая 18. В рассмотренном коротком способе мы просто опустили эту часть вычислений.

Более высокая точность

Если мы хотим вычислять с большей точностью, можно повторить процедуру, используя полученный ответ в качестве второй оценки.

Для демонстрации метода возьмем самый первый пример, приведенный в этой главе:

√56 =

Нашим первым приближением является 7 (7 x 7 = 49).

56: 7 = 8

8 – 7 = 1 (разница)

1: 2 = 0,5

7 + 0,5 = 7,5

Теперь повторим процесс. Разделим 56 на 7,5. Данная операция не составляет труда. Это то же самое, что 112: 15 или 224: 30. Если мы удваиваем и делимое, и делитель, результат деления не изменяется.

224 легко делится на 30. Делим сначала на 10 (22,4), а потом на 3.

224: 30 = 7,4667

Можно использовать наш короткий способ для нахождения среднего значения. Мы знаем, что первой частью ответа является 7,4. Приписываем остаток 1 спереди к 667 и получаем 1667. Делим это число на 2:

1667: 2 = 833,5

Приписываем 833 к 7,4 справа, получая ответ: 7,4833. Все цифры данного ответа соответствуют точному значению квадратного корня из 56.

Вообще, всякий раз повторяя данный процесс, мы удваиваем количество точных цифр в ответе.

Разберем еще один пример.

Одним из упражнений на вычисления в уме в этой главе была задача на извлечение квадратного корня из 500. Продолжим вычислять в уме, но попробуем при этом увеличить точность

ответа.

Ранее мы посчитали, что:

√500 = 22,5

Вместо того чтобы делить 500 на 20, теперь будем делить его на 22,5. Трудно ли это? Нет, если мы сначала дважды удвоим оба наших числа.

Удвоение 500 и 22,5 дает 1000 и 45. Повторное удвоение дает 2000 и 90.

Делим 2000 на 90, чтобы получить более точное приближение искомого корня. Чтобы разделить 2000 на 90, делим сначала на 10, а потом на 9.

2000: 10 = 200

200: 9 = 22,22

Теперь найдем среднее для 22,22 и 22,5.

22 перед десятичной запятой, очевидно, останется без изменения. Чтобы узнать, что будет с цифрами после запятой, найдем среднее для 50 и 22.

22 + 50 = 72

72: 2 = 36

Прибавим 0,36 к 22 и получим ответ, в котором все цифры соответствуют цифрам в точном значении корня.

22 + 0,36 = 22,36 ОТВЕТ

После некоторой практики все рассмотренные вычисления могут выполняться в уме. Так что тренируйтесь!

Глава 18
Вычисление квадратного корня

Существует простой способ вычисления точного значения квадратного корня из числа. Речь идет о процессе, который я называю перекрестным умножением.

Вот как он работает.

Перекрестное умножение

Чтобы выполнить перекрестное умножение однозначного числа, вы просто возводите его в квадрат:

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

Если же у числа две цифры, тогда вы перемножаете их между собой и удваиваете результат.

$34 = 3 \times 4 = 12$

$12 \times 2 = 24$

В случае трехзначного числа следует перемножить первую и третью цифры, удвоить результат, а затем прибавить к этому квадрат средней цифры. Например, выполнить перекрестное умножение числа 345 — это значит:

$3 \times 5 = 15$

$15 \times 2 = 30$

$30 + 4^2 = 46$

Общее правило перекрестного умножения числа с четным количеством цифр:

Умножьте первую цифру на последнюю, вторую — на предпоследнюю, третью — на цифру перед предпоследней и т. д., пока все цифры не будут перемножены. Затем сложите все полученные произведения и удвойте результат.

На практике вы складываете произведения одно за другим, а потом удваиваете полученную сумму.

Общее правило перекрестного умножения числа с нечетным количеством цифр:

Умножьте первую цифру на последнюю, вторую — на предпоследнюю, третью — на цифру перед предпоследней и т. д., пока не дойдете до средней цифры. Сложите все полученные произведения и удвойте результат. Прибавьте к нему квадрат средней цифры.

Следующие примеры служат иллюстрацией этого:

123 = 1 x 3 = 3, 3 x 2 = 6, 6 + 2^2 (4) = 10

1234 = 1 x 4 (4), + 2 x 3 (6) = 10, 10 x 2 = 20

12345 = 1 x 5 (5), +2 x 4 (8) = 13, 13 x 2 = 26, 26 + 3^2 (9) = 35

Использование перекрестного умножения для извлечения квадратного корня

Метод извлечения квадратного корня состоит в следующем.

Например:

$\sqrt{2809}$ =

Прежде всего разобьем цифры попарно. Каждой паре цифр будет соответствовать одна цифра в ответе.

$$\sqrt{28\ 09} =$$
$$\ast \quad \ast$$

Таким образом, квадратный корень будет иметь две цифры (в целой своей части, разумеется).

Во-вторых, оценим величину квадратного корня из числа, образованного из цифр первой пары. Квадратный корень из 28 приближаем числом 5 (5 x 5 = 25). Таким образом, 5 — это первая цифра ответа.

Удвоим первую цифру ответа (2 x 5 = 10) и запишем результат слева от числа. Данное число будет нашим делителем. Запишем 5 — первую цифру ответа — над цифрой 8 в первой паре цифр (28).

Записанное нами выглядит так:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 10\sqrt{28\ 09} \end{array}$$

На этом мы закончили работу над первой цифрой ответа.

Чтобы найти вторую цифру, возведем в квадрат первую цифру нашего ответа и вычтем результат из первой пары цифр исходного числа.

5^2 = 25

28 – 25 = 3

Число 3 — это наш остаток. Переносим остаток 3 к

следующей цифре числа, из которого извлекаем корень. Это дает нам новое рабочее число 30.

Разделим наше рабочее число (30) на делитель (10). Получаем 3 — следующую цифру ответа. 30 делится на 10 без остатка, поэтому переносить нечего. 9 — новое рабочее число.

Наше решение теперь выглядит так:

$$\begin{array}{r} 5\quad 3 \\ 10\sqrt{28\ {}_{3}09} \\ 25 \end{array}$$

И наконец, выполним перекрестное умножение с последней цифрой ответа.

$\mathbf{3^2 = 9}$

Вычтем результат из нашего рабочего числа:

$\mathbf{9 - 9 = 0}$

Остатка нет: 2809 является точным квадратом. Его квадратный корень равен 53.

$\mathbf{10\ \sqrt{2809} = 53}$

Рассмотрим другой пример:

$\mathbf{\sqrt{54756}} =$

Во-первых, разобьем попарно цифры и получим три пары цифр. Искомым корнем будет трехзначное число.

$$\sqrt{5\ 47\ 56} =$$
$$\star\ \ \star\ \ \star$$

Теперь оценим приближенное значение корня из числа, образованного цифрами из первой пары. Речь в данном случае идет об одном числе: 5. В качестве приближения для корня из 5 берем 2 (2 x 2 = 4).

Запишем 2 в качестве первой цифры нашего ответа. Удвоим ее, чтобы получить делитель (2 x 2 = 4).

Теперь наше решение выглядит так:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4\sqrt{5\ 47\ 56} \\ 4 \end{array}$$

Возведем в квадрат первую цифру ответа, запишем результат внизу и вычтем его из числа, составленного из цифр первой пары:

$2^2 = 4$

$5 - 4 = 1$

Переносим 1 к следующей цифре. Получаем новое рабочее число 14.

Разделим 14 на наш делитель 4. Ответом будет 3 с остатком 2 (3 x 4 = 12). Переносим остаток к следующей цифре. Наше следующее рабочее число — 27.

$$\begin{array}{r} 2\,3 \\ 4\overline{)5_1 4_2 7\,56} \\ 4 \end{array}$$

Выполняем перекрестное умножение с цифрами ответа, за исключением первой, то есть с цифрой 3.

$3^2 = 9$

Вычтем результат из рабочего числа:

$27 - 9 = 18$

Разделим 18 на 4 и получим в ответе 4 с остатком 2. Таким образом, 4 является последней цифрой ответа. Все другие цифры, которые мы теперь будем получать, относятся к дробной, то есть после десятичной запятой, части ответа. Переносим остаток 2.

$$\begin{array}{r} 2\,3\,4 \\ 4\overline{)5_1 4_2 7_2\,56} \\ 4 \end{array}$$

Наше очередное рабочее число — 25.

Выполняем перекрестное умножение с цифрами ответа, за исключением первой:

$4 \times 3 = 12$

$12 \times 2 = 24$

Вычитаем 24 из рабочего числа (25) и получаем в результате 1. Делим 1 на 4. Получаем в ответе 0 с остатком 1. Переносим 1 к последней цифре. Теперь нашим рабочим числом является 16.

$$\begin{array}{r} 2\,3\,4{,}0 \\ 4\overline{)5_1 4_2 7_2 5_1 6} \\ 4 \end{array}$$

Выполняем перекрестное умножение:

$0 \times 3 = 0$

$4^2 = 16$

Вычитаем 16 из нашего рабочего числа и получаем в ответе 0. Остатка нет.

И в данном примере 54756 является точным квадратом. Его квадратный корень — 234.

Если бы мы получили остаток, то просто перенесли бы его к следующему числу и продолжили процесс до того количества знаков после запятой, которое нам требуется.

Сравнение методов

Каким был бы наш ответ, если бы мы оценивали приближенное значение корня посредством метода, описанного в предыдущей главе?

$$\sqrt{5\ 47\ 56} =$$
$$\star\ \ \star\ \ \star$$

Определяем 2 в качестве оценки для первой цифры ответа. Следующие две цифры автоматически становятся нулями. Первой оценкой искомого корня является 200.

Разделим 54756 на 200. Сначала разделим на 100, а потом на 2.

54756: 100 = 547,56

547: 2 = 273

Находим среднее для 200 и 273, получим 236. Мы могли бы округлить в сторону уменьшения до 235 — на единицу больше, чем истинный ответ, что соответствует ошибке в размере примерно 0,5 процента. Такая точность вполне приемлема для большинства ситуаций. Однако, если вы желаете получить точное значение корня, тогда метод перекрестного умножения является самым простым из всех известных мне.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) √3249 = _; б) √2116 = _; в) √103041 = _

Ответы:

а) 57; б) 46;

Решим пример в) вместе:

√103041 =

Разобьем цифры числа на пары:

$$\sqrt{10\,30\,41} =$$
$$\star\ \ \star\ \ \star$$

Есть три пары цифр, поэтому и в ответе будет три цифры в целой части.

Вычисляем приближенное значение квадратного корня из числа, образованного из цифр первой пары, то есть из числа 10. 3 на 3–9. 4 не годится, потому что 4 в квадрате превышает 10. Значит, первой цифрой ответа будет 3. Таким образом, нашим делителем является 6.

3 в квадрате дает 9. Поделив 10 на 9, получаем остаток 1. Переносим его к следующей цифре. Это дает нам новое рабочее число — 13.

$$\sqrt{10\,30\,41} =$$
$$\star\ \ \star\ \ \star$$

Делим 13 на делитель 6:

13: 6 = 2 r1

Следующая цифра ответа — 2, а рабочее число — 10.

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2 \\ 6\sqrt{10_1 3_1 0\ \ 41} \\ 9 \end{array}$$

Выполняем перекрестное умножение с цифрой 2 и получаем 4. Вычтем 4 из рабочего числа:

10 — 4 = 6

Делим 6 на 6.

6: 6 = 1

1 — это последняя цифра целой части нашего ответа. У нас нет остатка для переноса.

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2\ 1 \\ 6\sqrt{10_1 3_1 0_0 41} \\ 9 \end{array}$$

Нашим новым рабочим числом будет 4. Выполняем перекрестное умножение. Такое умножение для числа 21 дает в ответе 4 (2 x 1 = 2, 2 x 2 = 4). Вычтем 4 из 4 и получим в результате 0.

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2\ 1{,}0 \\ 6\sqrt{10_1 3_1 0_0 4_0 1} \\ 9 \end{array}$$

Новым рабочим числом является 1.

Выполняем перекрестное умножение:

0 x 2 = 0

1^2 = 1

Вычтем 1 из 1. Нашим последним результатом является 0, поэтому 103041 — точный квадрат. Квадратный корень из этого числа равен 321.

Немного попрактиковавшись, вы сможете выполнять все вышеприведенные вычисления в уме, что произведет большое впечатление на окружающих.

Вопрос читателя

Один читатель спросил меня, как бы я находил квадратный корень из числа 2401.

После разбивки цифр на пары задача выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{l} \sqrt{24\ 01} = \\ \ \ \

$\sqrt{23222761}$ =

Разбиваем цифры на пары и получаем:

$$\sqrt{23\,22\,27\,61} =$$
$$\star\quad\star\quad\star\quad\star$$

Полностью решенная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{r} 4\quad 8\quad 1\quad\ 9,\quad\ 0\quad 0\quad 0 \\ \hline 8\sqrt{23\ {}_{7}2\ {}_{8}2\ \ {}_{10}2\ \ {}_{14}7\ {}_{2}6\ {}_{8}1} \\ -16\quad -64\quad -16\quad -145\ -18\ -81 \\ \quad\ 18\quad\ 86\quad\ \ 2\quad 8 \end{array}$$

Каждый раз, выполняя деление, вам необходимо помнить о том, что переносимый остаток должен давать результат, превышающий число, получаемое в итоге перекрестного умножения. Кроме того, 9 является самым большим значением, которое можно использовать в качестве остатка, даже если в результате деления выходит 10 или 11. Если деление не дает остатка, а у вас в ответе уже имеются цифры, с которыми можно выполнить перекрестное умножение, необходимо уменьшить результат, по крайней мере, на 1.

Я обычно использую первый метод для вычисления приближенного значения квадратного корня; но если мне нужен точный ответ, я применяю способ, рассмотренный в настоящей главе. Чем больше числа, с которыми вы имеете дело, тем труднее будут вычисления, поскольку приходится выполнять перекрестное умножение с большим количеством цифр. К тому же метод приближенного вычисления квадратного корня проще сам по себе.

Давайте сравним оба метода в процессе нахождения квадратного корня из 196. Сначала методом оценки:

$$\sqrt{1\,96} =$$
$$\star\quad\star$$

Разделим число на пары цифр. Их две, поэтому в ответе будут две цифры.

Находим приближение для квадратного корня из числа, составленного из цифр первой пары (1).

Квадратный корень из 1 равен 1. Первая цифра ответа — 1.

Второй цифрой будет, как обычно, 0. Первое приближение,

таким образом, равняется 10.

196: 10 = 19,6

Округляем в сторону уменьшения и находим среднее. Округляем до 19. Разница равна 9 (19–10 = 9). Половина от 9 равна 4,5. Прибавляем 4,5 к 10 и получаем ответ: 14,5.

Чтобы повысить точность, можно использовать 15 в качестве второй оценки.

Делим 196 на 15. Простой способ сделать это состоит в том, чтобы удвоить оба числа (196 = 200 — 4, удвоив 200 — 4, получаем 400 — 8). Теперь мы имеем 392: 30. Чтобы разделить 392 на 30, делим сначала на 10, а затем на 3.

392: 10 = 39,2

39,2: 3 = 13,06

Округляем в сторону уменьшения до 13.

Разделим разницу между 13 и 15. Половина от 2 равна 1. Отнимаем это от нашей исходной округленной оценки (15 — 1 = 14). Ответом является 14 — точный корень из 196.

Как работал бы наш метод с перекрестным умножением в случае извлечения корня из 196?

$\sqrt{196}$ =

Разобьем число на пары цифр:

$$\sqrt{1\,96} =$$

Оцениваем значение квадратного корня из числа, составленного из цифр первой пары (1). Квадратный корень из 1 равен 1. Это первая цифра ответа. Удваиваем ее и получаем делитель. 2 на 1–2.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2\sqrt{1\;\;96} \end{array}$$

Делим следующую цифру числа (9) на делитель.

9: 2 = 4 с остатком 1

Записываем 4 в качестве второй цифры ответа и переносим остаток к следующей цифре (6), получая в итоге 16.

$$\begin{array}{r} 1\;\;4{,}0 \\ 2\sqrt{1\;\;9_{1}6} \end{array}$$

Выполняем перекрестное умножение (возводим в квадрат)

для цифры 4 в ответе (первую цифру, как требует метод, мы не трогаем) и отнимаем результат из нашего рабочего числа 16. 4 в квадрате дает 16, вычитаем его из 16 и получаем 0. Таким образом, 196 — точный квадрат (числа 14).

В данном конкретном случае метод, представленный в настоящей главе, применять легче, чем метод оценки значения из предыдущей главы. Таким образом, у вас теперь есть выбор.

Глава 19
Способы быстрых вычислений

Много книг написано о том, как быстрее вычислять, используя различные приемы и свойства чисел. Такие способы не только экономят время и силы, но также помогают развивать математические способности. В этой главе я расскажу вам о некоторых способах, применение которых делает вычисления более быстрыми и занимательными.

Умножение на 11

Чтобы умножить двузначное число на 11, необходимо просто сложить цифры и вставить результат посредине.

Например, чтобы перемножить 23 на 11, сложим 2 и 3, что равняется 5, и вставим 5 между 2 и 3. Ответом будет 253.

Чтобы умножить 14 на 11, сложим 1 и 4, получая 5, и вставим 5 между 1 и 4. Ответ: 154.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 63 x 11 = _; б) 52 x 11 = _; в) 34 x 11 = _; г) 26 x 11 = _; д) 71 x 11 = _; е) 30 x 11 = _

Ответы:

а) 693; б) 572; в) 374; г) 286; д) 781; е) 330

В приведенных примерах две цифры дают в сумме число, меньшее или равное 9. Что делать, когда сумма двух цифр больше 9? Когда результатом сложения цифр при умножении на 11 является двузначное число, следует вставить цифру единиц между цифрами исходного числа и прибавить цифру десятков (1) к первой цифре числа.

Например, чтобы умножить 28 на 11, прибавим 2 к 8 и получим 10. Вставим 0 между 2 и 8, получая 208, и прибавим 1 к первой цифре (2), что даст нам ответ: 308.

Попробуем еще раз на примере 88 x 11:

8 + 8 = 16

Вставляем 6 между 8 и 8, что даст нам 868, затем прибавляем 1 к первой 8, получая окончательный ответ: 968.

«Скажи, сколько будет…»

Когда детям предлагают решить подобные задачи (и приучают их к самостоятельному вычислению), это помогает развитию у них базовых математических навыков. Викторины вроде «Скажи, сколько будет…» популярны среди детей всех возрастов.

Если бы кто-нибудь попросил вас умножить 77 на 11, вы немедленно увидели бы: 7 плюс 7 дает 14, что больше 9. Вы сразу же прибавили бы 1 к 7 и сказали: «Восемьсот.» Следующей цифрой ответа будет 4 от 14, за которой следует 7, так что вы продолжили бы почти без паузы: «Сорок. семь». Попробуйте сами. Это гораздо легче, чем кажется.

Рассмотрим другой пример: если бы вам надо было умножить 84 на 11, вы мгновенно оценили бы, что 8 плюс 4 больше 9, поэтому следует прибавить 1 к 8: «Девятьсот.» Затем вы сложили бы 8 и 4, что дает 12, так что средней цифрой является 2. Поэтому вы продолжили бы: «.двадцать». Последней цифрой будет 4: «.четыре». Полностью ваш ответ прозвучал бы так: «Девятьсот двадцать четыре».

А как насчет 96 на 11?

9 плюс 6 равно 15. Прибавим 1 к 9 и получим 10. Работаем с числом 10, будто оно однозначное: 10 — первая часть ответа. Цифра 5 является средней, а 6 — последней. Ответ — 1056.

Решая эту задачу в уме, вы представили бы себе: «Девять плюс один будет десять». Вслух вы бы сказали: «Тысяча…» Затем вы бы заметили, что 5 в числе 15 — это цифра десятков в ответе, поэтому сказали бы: «Пятьдесят.» Цифра единиц остается той же: 6. После этого вы закончили бы: «Тысяча. пятьдесят. шесть».

Попробуйте решить следующие примеры. Выполнив вычисления в уме, как можно быстрее назовите ответ:

а) 37 х 11 = _; б) 48 х 11 = _; в) 76 х 11 = _; г) 92 х 11 = _; д) 82 х 11 = _; е) 66 х 11 = _

Ответы:

а) 407; б) 528; в) 836; г) 1012; д) 902; е) 726

Умножение на число, кратное 11

Как умножить 330 на 12?

Казалось бы, здесь трудно применить наш способ умножения

на 11, однако давайте разберемся.

330 = 3 x11 x 10

(Возьмите за привычку не обращать внимания на нуль в конце числа, работая с задачами на умножение или деление. На такое число следует смотреть как на составленное из цифр перед нулем, умноженное на десять.)

Поскольку 33 — это 3 x 11, умножаем 12 на 3, а затем на 11. 12 на 3 равно 36, а 36, умноженное на 11, дает 396 (с помощью нашего способа быстрого умножения на 11).

Затем умножаем еще на 10 и получаем окончательный ответ: 3960.

Ясное дело, что данный способ можно применять к любым числам, кратным 11: 22, 33, 44, 55 или 2,2, 3,3, 5,5 и т. д. Например, в килограмме — 2,2 фунта. Чтобы перевести килограммы в фунты, надо умножить вес в килограммах на 2,2. Следует удвоить число, умножить на 11, а затем разделить на 10, чтобы учесть положение десятичной запятой.

Чтобы перевести 80 килограммов в фунты, удвоим 80, получив 160. Теперь умножим на 11 (1760) и разделим на 10, получив в качестве ответа 176 фунтов.

Сколько фунтов в 90 килограммах?

90 x 2 = 180

180 x 11 = 1980

1980: 10 = 198 ОТВЕТ

Умножение чисел с четырьмя и более знаками

Чтобы умножить на 11 число с четырьмя и более знаками, будем использовать похожий метод. Возьмем, к примеру, произведение 12345 x 11. Запишем задачу в следующем виде:

012345 x 11 =

Мы приписали к числу, которое умножаем на 11, нуль слева. Очень скоро вы поймете почему. Начиная с цифры единиц, прибавим к каждой цифре находящуюся справа от нее цифру. В данном случае прибавим к 5 цифру, находящуюся справа. Справа цифры нет, поэтому прибавляем нуль:

5 + 0 = 5

Записываем 5 в качестве последней цифры ответа. Наши вычисления теперь выглядят следующим образом:

$$\frac{012345 \times 11}{5}$$

Теперь переходим к цифре 4. Справа от 4 находится цифра 5:

4 + 5 = 9

Записываем 9 в качестве следующей цифры ответа. Теперь решение выглядит так:

$$\frac{012345 \times 11}{95}$$

Далее продолжим аналогичным образом:

3 + 4 = 7

2 + 3 = 5

1 + 2 = 3

0 + 1 = 1

Так выглядит решение в окончательном виде:

$$\frac{012345 \times 11}{135795}$$

Если не приписать нуль слева в самом начале, можно забыть выполнить последний шаг в решении.

Это очень простой способ умножения на 11. Метод, помимо всего прочего, также помогает закрепить навыки сложения.

Попробуем решить еще одну задачу. На сей раз нам придется переносить цифры из разряда в разряд. Обратите внимание, что единственной цифрой, которую можно переносить, используя данный метод, будет цифра 1 (максимальная сумма, которую могут дать две цифры, равна 18: 9 + 9).

Решим следующий пример:

217475 x 11 =

Записываем его в следующем виде:

0217475 x 11 =

Прибавим к цифре единиц цифру правее ее. Справа цифры нет, поэтому прибавляем нуль. 5 + 0 = 5. Записываем 5 под 5. Теперь сложим цифры 7 и 5:

7 + 5 = 12

Записываем 2 в качестве следующей цифры ответа и переносим 1 в следующий разряд. Теперь вычисления выглядят так:

$$\frac{02174_{1}75 \times 11}{25}$$

Следующие шаги таковы:
4 + 7 + 1 (перенесенная) = **12**
2 — следующая цифра ответа. Переносим 1.
1 + 7 + 1 (перенесенная) = **9**
2 + 1 = 3
0 + 2 = 2
В окончательном виде решение выглядит так:

$$\frac{02_{1}1_{1}7_{1}475 \times 11}{23\ 9\ 2\ 225}$$

Математическая игра

Рассматриваемый метод можно также использовать для математических игр. Речь пойдет о проверке результата умножения на 11. Не забывайте, что задача решена не до конца, пока вы не выполнили проверку результата. Рассмотрим нашу первую задачу из предыдущего раздела:

$$\frac{012345 \times 11}{135795}$$

Поставим крестик под каждой второй цифрой ответа, начиная с правой крайней. Мы получим следующую картину:

$$\frac{012345 \times 11}{135795}$$
x x x

Теперь сложим цифры, помеченные крестиком:
1 + 5 + 9 = 15
15 — это наше контрольное число. Теперь сложим цифры, не помеченные крестиком:
3 + 7 + 5 = 15
15 — наше второе контрольное число.

Если ответ решенного примера верен, тогда контрольные числа должны быть либо равны, либо различаться на 11 или число, кратное 11, такое как 22, 33, 44, 55 и т. д. В приведенном примере оба контрольных числа равны 15, поэтому ответ верный.

Проверим, верно ли мы решили второй пример:

$$\begin{array}{r} 0217475 \times 11 \\ \hline 2392225 \\ \text{x}\ \ \text{x}\ \ \text{x} \end{array}$$

Сложим цифры, помеченные крестиком:

3 + 2 + 2 = 7

Затем сложим цифры, не помеченные крестиком:

2 + 9 + 2 + 5 = 18

Чтобы найти разницу между 7 и 18, вычтем из большего числа меньшее:

18 — 7 = 11

Если разница равна 0, 11, 22, 33, 44, 55 и т. д., значит, наш ответ верен. Здесь разница составляет 11, поэтому мы получили правильный ответ.

Предложите решить подобные задачи детям. Попросите умножить на 11 выбранные ими числа и посмотреть, какую разницу они смогут получить. Чем больше умножаемое число, тем большую разницу можно получить. Кому-нибудь, быть может, даже удастся установить рекорд.

Дети будут умножать стозначные и еще более длинные числа на 11, пытаясь установить рекорд. Мало того, что им удастся заслужить чемпионский титул, они смогут совершенствовать свои навыки сложения и проверки правильности полученного ответа.

Умножение на 9

Наряду со способом быстрого умножения на 11 (поскольку 11 на 1 больше 10) имеется способ быстрого умножения на 9 (поскольку 9 на 1 меньше 10). В данном способе, вместо того чтобы прибавлять к каждой цифре цифру справа, мы вычитаем каждую цифру из цифры справа.

Поскольку вычитание сопряжено с переносом единиц разрядов, можно использовать следующий прием, ускоряющий вычисления. Сначала вычитаем цифру единиц из 10, а затем каждую последующую цифру вычитаем из 9 и прибавляем

соседнюю справа цифру. Чтобы получить первую слева цифру ответа (самого старшего разряда), вычитаем 1 из первой цифры числа, умножаемого на 9.

Например:

254 x **9** =

Вычитая 4 из 10, получаем 6. Вычитание 5 из 9 дает 4 и плюс 4 (соседняя справа цифра) — получаем 8 (86). 9 минус 2 равно 7 и плюс 5 дает 12. Записываем 2, 1 переносим (286).

Вычитаем 1 из первой цифры (2) и прибавляем 1, которое перенесли, получаем в ответе 2. Ответ: 2286.

254 x **9** = **2286 ОТВЕТ**

Деление на 9

Существует простой способ деления любого числа на 9.

Чтобы разделить 42 на 9, берем цифру десятков в качестве целой части ответа, а в качестве остатка берем сумму цифр. 4 + 2 = 6 (остаток).

4 r6 ОТВЕТ

Рассмотрим другой пример:

34: **9** =

Цифра десятков равняется 3, поэтому записываем 3 в качестве целой части ответа.

3 + 4 = 7

3 r7 ОТВЕТ

А как насчет 71?

Цифра десятков равна…

Остаток равен.

Ответ: 7 с остатком 8.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 52: 9 = _; б) 33: 9 = _; в) 61: 9 = _; г) 44: 9 = _

Ответы:

а) 5 r7; б) 3 r6; в) 6 r7; г) 4 r8

Легко, не так ли? Но как поступить, спросите вы, если надо разделить 46 на 9? Проблема в том, что 4 и 6 в сумме дают 10. Что делать?

Попробуем разобраться:

46: 9 =

Цифра десятков — 4, поэтому целой частью ответа является 4.

4 плюс 6 дает 10 — остаток согласно нашему методу. Полученный остаток больше 9, поэтому налицо некая ошибка.

Нельзя иметь остаток больше делителя. 10 при делении на 9 дает 1 с остатком 1. Цифра десятков равна 1, плюс 1 + 0 = 1 (остаток).

Прибавим полученную целую часть (1) к предыдущей целой части (4) и получим окончательную целую часть 5, а остатком будет 1.

Попробуем решить другой пример:

75: 9 =

Цифра десятков равна 7.

7 плюс 5 дает 12 (остаток). Остаток не должен превышать делитель, поэтому делим полученный промежуточный остаток на делитель.

12: 9 =

Цифра десятков равна 1. Поэтому можно увеличить целую часть искомого ответа на 1.

7 + 1 = 8

1 + 2 = 3 остаток

8 r3 ОТВЕТ

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 85: 9 = _; б) 37: 9 = _; в) 28: 9 = _; г) 57: 9 = _

Ответы:

а) 9 r4; б) 4 r1; в) 3 r1; г) 6 r3

Умножение с помощью множителей числа

Очень часто, когда вам необходимо перемножить два числа, вычисление удается упростить, если имеется возможность удвоить одно число и уменьшить в два раза другое (такой метод получил название «удвой и умножь»). На самом деле в этом случае речь идет об умножении с помощью множителей перемножаемых чисел.

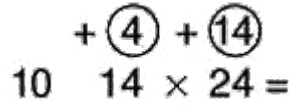
Простой способ умножить 3 на 14 состоит в том, чтобы удвоить 3 и взять половину 14, получая при этом 6 х 7. В чем здесь секрет? Дело в том, что вы разбиваете 14 на 2 и 7, после чего удваиваете 3 (3 х 2) и затем умножаете на 7, то есть на половину от 14.

3 х 14 = 3 х (2 х 7) = 6 х 7 = 42

Чтобы умножить 4 на 22, умножим 4 на 2, получая 8, а затем 8 на 11. (При этом мы удваиваем 4 и берем половину от 22.) На самом деле мы просто использовали множители числа 22 (2 и 11), чтобы упростить вычисления. Когда бы вам ни приходилось

перемножать числа, одно из которых значительно меньше другого, пробуйте применять данный принцип для упрощения расчетов.

Скажем, вам надо умножить 14 на 24. Возьмем 10 в качестве опорного числа и выполним вычисление как обычно.



Складывая накрест, получаем 28 (14 + 14 или 24 + 4). Умножим 28 на опорное число 10 и получим 280.

Теперь нам необходимо перемножить числа в кружках: 4 х 14. Мы могли бы сначала умножить 4 на 10, получая 40, а затем прибавить 4 х 4 = 16, что даст нам 56.

Или же можно удвоить и взять половину.

14 равно 2 х 7, а произведение 4 на 2 равно 8. Таким образом, 4 х 14 — это то же самое, что и 8 х 7. 8 на 7 равно 56.

Мы удвоили 4 и взяли половину 14, получив в результате 8 х 7.

Наш промежуточный результат (280) в сумме с 56 дает 336.

Решите самостоятельно следующие примеры:

а) 4 х 18 = _; б) 6 х 24 = _; в) 48 х 180 = _

Ответы:

а) 72; б) 144; в) 8640

(Примеры преобразуются в следующие: 8 х 9, 12 х 12 и 96 х 90.)

Немного попрактиковавшись, вы научитесь легко распознавать ситуации, когда можно успешно использовать подобные приемы.

Деление с помощью множителей числа

Если у вас имеется 100-миллиграммовая бутылочка с лекарством и вам нужно принимать по две дозы по 7,5 миллиграмма в день, на сколько дней хватит бутылочки?

Казалось бы, разделить 100 на 7,5 без калькулятора не так-то просто.

Попробуем поступить иначе. Если надо ежедневно принимать по две дозы, то речь идет о 15 миллиграммах в день. Однако разделить 100 на 15 без остатка не получится.

Есть более простой способ решить эту задачу. Если мы удвоим оба числа, ответ от этого не изменится. Два раза по 100, деленное на 15, — это то же, что и 200, деленное на 30.

Чтобы разделить на 30, разделим сначала на 10, а затем на 3.

200: 10 = 20

20: 3 = $6^2/_3$

Лекарства хватит на шесть с половиной дней (в последний день вам пришлось бы принять две трети дозы, оставшиеся в бутылочке).

Легкость, с которой мы произвели расчет, впечатляет. Действительно, все очень просто.

Простой способ деления:

• на 15 — удвоить делимое и разделить полученное число на 30;

• на 25 — удвоить делимое и разделить полученное число на 50;

• на 35 — удвоить делимое и разделить полученное число на 70;

• на 45 — удвоить делимое и разделить полученное число на 90.

Например, если вам нужно разделить 2341 на 35, следует удвоить 2341 и разделить результат на 10, а затем на 7.

2341 x **2 = 4682**

4682: 10 = 468,2

468,2: 7 = 66,8857

Речь идет о простом вычислении с делением на однозначное число.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 600: 15 = _; б) 217: 35 = _; в) 560: 35 = _; г) 630: 45 = _

Ответы:

а) 40; б) 6,2; в) 16; г) 14

Произведение двух чисел с одинаковым числом десятков и суммой единиц, равной 10

В главе 10 мы познакомились с простым способом возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5. Существует способ быстрого перемножения для чисел с одинаковым числом единиц и суммой, равной 10, использующий аналогичную формулу.

Например, рассматривая произведение 17 x 13, можно заметить, что цифры десятков у обоих чисел одинаковы, а цифры

единиц дают в сумме 10.

Прежде всего умножим цифру десятков на нее же, но увеличенную на единицу.

Прибавляя 1 к цифре десятков, получаем 1 + 1 = 2. Умножая 1 на 2, получаем 2. Это будет число сотен ответа (200).

Теперь перемножим цифры единиц. Произведение 3 х 7 равно 21.

200 + 21 = 221 ОТВЕТ

Возьмем другой пример:

62 х **68** =

Цифра десятков у обоих чисел — 6. Прибавим 1 к 6 (6 + 1 = 7). Умножая 6 на 7, получаем 42. Это число сотен, то есть 4200. Затем вычисляем 2 х 8 = 16.

4200 + 16 = 4216 ОТВЕТ

При работе с числами сталкиваешься с подобными ситуациями гораздо чаще, чем может показаться.

Попробуем решить еще один пример:

123 х **127** =

12 + 1 = 13

12 х **13 = 156**

156 — это число сотен ответа (15600). Делая вычисления в уме, на этом этапе уже можно сказать: «Пятнадцать тысяч шестьсот.»

3 х 7 = 21

Ответом будет 15621. Здесь можно закончить: «…двадцать один».

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 43 х 47 = _; б) 21 х 29 = _; в) 114 х 116 = _; г) 32 х 38 = _; д) 46 х 44 = _; е) 148 х 142 = _

Ответы:

а) 2021; б) 609; в) 13224; г) 1216; д) 2024; е) 21016

Вычисления не потребовали практически никаких усилий. Вместе с тем у окружающих возникает ощущение, что вы считаете как настоящий гений. Это лишний раз доказывает, что гении просто владеют более совершенными методами. Освойте их, и вы тоже станете считать как гений.

Перемножение чисел, у которых цифры единиц дают в сумме 10, а цифры десятков разнятся на 1

Если вам надо перемножить 38 и 42, то существует способ

быстрого перемножения для этого и подобных ему случаев.

Когда у двух чисел цифры единиц дают в сумме 10, а цифры десятков разнятся на 1, меньшее число будет ровно на столько же меньше числа, полученного после его округления в сторону увеличения, на сколько большее число будет его больше. В данном случае 38 на 2 меньше, чем 40, а 42 на 2 больше, чем 40. В математике существует правило: если вы перемножаете два числа, которые на одинаковую величину больше и меньше некоторого числа, то их произведение будет равно квадрату этого числа за вычетом квадрата разницы.

Продолжим с нашим примером:

38 x **42** =

38 на 2 меньше 40, а 42 на 2 больше. Найти квадрат 40 не составит труда: 40 x 40 (чтобы умножить 40 на 40, отбросим нули; 4 x 4 =16, после чего прибавим два нуля к результату).

40 отличается и от 38, и от 42 на 2. 2 в квадрате равно 4.

1600 — 4 = 1596 ОТВЕТ

Вот и все.

Попробуем решить другой пример:

67 x **73** =

Можно заметить, что каждое из перемножаемых чисел разнится на 3 от 70: 67 на 3 меньше, а 73 на 3 больше. Ответом, таким образом, будет 70 в квадрате за вычетом 3 в квадрате.

70^2 = 4900 3^2 = 9

4900 — 9 = 4891 ОТВЕТ

Попробуйте сами

а) 27 x 33 = _; б) 46 x 54 = _; в) 122 x 118 = _; г) 9 x 11 = + +

Ответы:

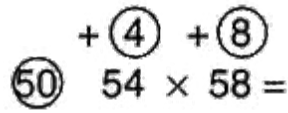
а) 891; б) 2484; в) 14396; г) 99

Произведение чисел, близких к 50

Рассмотрим еще один способ быстрого перемножения, сходный с методом возведения чисел в квадрат, описанным в главе 10.

Чтобы найти произведение двух чисел, близких к 50, надо сложить числа в кружках, взять половину полученной суммы и прибавить к ней 25. Это даст нам число сотен ответа. Затем перемножим числа в кружках. Прибавим полученную сумму к числу сотен.

Рассмотрим на примере:



Найдем сумму чисел в кружках. 4 плюс 8 дает 12. Половина от 12 равна 6. Прибавим 6 к 25.

25 + 6 = 31

Мы получили число сотен ответа. (Умножая 31 на 100, получаем 3100.) Найдем произведение чисел в кружках:

4 x 8 = 32

Ответом будет 3132.

А что, если одно из перемножаемых чисел нечетное, а другое четное? Посмотрим, что получится, на примере.

53 x 54 =

3 + 4 = 7

Половина от 7 равна $3^1/_2$.

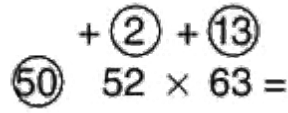
25 + $3^1/_2$ = $28^1/_2$

Умножим: 282 x 100 = 282 сотен, то есть 2850. Перемножим числа в кружках:

3 x 4 = 12

2850 + 12 = 2862 ОТВЕТ

Вычисления не представляли сложности. Попробуем решить еще один пример:



Сложим числа в кружках:

2 + 13 = 15

Половина от 15 равна $7^1/_2$.

25 + $7^1/_2$ = $32^1/_2$

Промежуточным результатом является 3250.

Теперь перемножим числа в кружках.

2 x 13 = 26

3250 + 26 = 3276 ОТВЕТ

Решите следующие примеры самостоятельно:

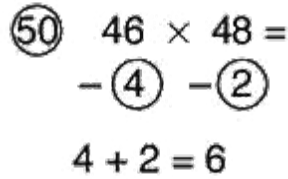
а) 52 x 56 = _; б) 61 x 57 = _; в) 53 x 59 = _; г) 54 x 62 = _

Ответы:

а) 2912; б) 3477; в) 3127; г) 3348

А что, если перемножаемые числа меньше 50? Рассмотрим

пример:



Половина от 6 равна 3. Вместо того чтобы прибавлять к 25, вычитаем 3 из 25. Это потому, что множители меньше 50, а не больше.

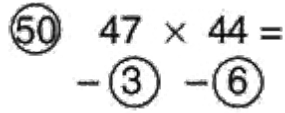
25 — 3 = 22

Наш промежуточный результат равен 2200. Найдем произведение чисел в кружках и прибавим его к промежуточному результату:

4 x 2 = 8

2200 + 8 = 2208 ОТВЕТ

Рассмотрим еще один пример:



Находим сумму чисел в кружках:

3 + 6 = 9

Половина от 9 равна $4^1/_2$. Вычтем $4^1/_2$ из 25. (Сначала вычитаем 5, а затем прибавляем 2.)

25 — $4^1/_2$ = $20^1/_2$

$20^1/_2$ x 100 = 2050

Перемножим числа в кружках:

3 x 6 = 18

2050 + 18 = 2068 ОТВЕТ

Все рассмотренные примеры можно легко вычислить в уме. Решите самостоятельно следующие примеры:

а) 49 x 48 = _; б) 46 x 47 = _

Ответы:

а) 2352; б) 2162

Вычитание из чисел, в которых все цифры, кроме первой, оканчиваются на 0

Простое правило вычитания любого числа из числа, в котором все цифры равны нулю, кроме первой, состоит в том, чтобы вычитать последнюю цифру вычитаемого (числа, которое мы вычитаем) из 10, а затем каждую последующую цифру — из 9. В уменьшаемом (числе, из которого производится вычитание) при этом следует вычесть 1 из первой цифры.

Пример:

300000 (уменьшаемое)

—25713 (вычитаемое)

274287 ОТВЕТ

Вычитаем 3 из 10, получая 7. Остальные цифры вычитаем из 9.

9 минус 1 равно 8, 9 минус 7–2, 9 минус 5–4, 9 минус 2–7. Вычитаем 1 из первой цифры уменьшаемого, получая 2.

А вот что мы делаем, когда количество цифр в вычитаемом меньше, чем в уменьшаемом:

20000000

—0052316

19947684

Мы просто приписываем нули к вычитаемому на месте недостающих цифр.

Поскольку нам не надо задумываться о переносе единиц из разряда в разряд, можно выполнять вычитание как слева направо, так и справа налево. Вычисление слева направо может произвести большое впечатление на окружающих.

Способ позволяет легко вычитать из 100 или 1000. Например:

1000 — 257 = 743

Вы должны быть в состоянии с первого взгляда назвать ответ как положено, слева направо. Произнося «семь. четыре. три», вы поочередно вычитаете каждую цифру из 9, двигаясь слева направо. Разумеется, последнюю цифру вы вычитаете из 10. С первой цифрой также нет проблем, поскольку 1 минус 1 равно 0.

Работая с числами, вы, вполне вероятно, откроете для себя новые способы быстрых вычислений. Одно время в Австралии налог с оборота составлял $27^1/_2$ процента. Я спросил у человека, которому постоянно приходилось вычислять размер данного налога, как он это делает. Это было в те дни, когда электронный калькулятор еще не стал частью нашей повседневной жизни.

Он сказал мне, что $27^1/_2$ — процента можно разбить на 25 и $2^1/_2$ процента. 25 процентов — это четверть суммы, облагаемой налогом. Прибавим к этому одну десятую этой четверти и получим $27^1/_2$ процента.

Таким образом, если необходимо вычислить налог в размере $27^1/_2$ процента на товар, который стоит 80 центов, вы для начала должны вычислить, сколько составляет четверть от 80. 20 составляет 25 процентов от 80, а одна десятая от 20 равна 2. Таким образом, $27^1/_2$ процента налога от продажи товара стоимостью 80 центов составляет 22 цента.

Человек, о котором идет речь, придумал этот простой метод со своими коллегами, чтобы облегчить себе работу. Таким вот образом совершается большинство открытий.

Если вы будете стремиться ко все более быстрым вычислениям и попытаетесь делать это иначе, чем вас учили в школе, то, возможно, и вас ожидают ваши собственные открытия.

Глава 20
Сложение и вычитание дробей

В дробях нет ничего особенного или сложного. Мы имеем дело с ними постоянно. Сообщая кому-нибудь время, вы, скорее всего, используете дроби (половина шестого, четверть седьмого, без четверти два и т. д.). Когда съедаете четверть цыпленка или беседуете с друзьями о футболе или баскетболе (половина тайма, вторая половина и т. д.), вы также пользуетесь дробями.

Мы даже складываем и вычитаем дроби, часто не отдавая себе в этом отчета. Мы знаем, что две четверти равны половине. Половина тайма в баскетболе бывает в конце второй четверти.

Вычисляя, сколько будет половина от числа 6, вы на самом деле выполняете операции с дробями.

В настоящей главе мы узнаем, как без труда складывать и вычитать дроби.

Вот, к примеру, дробь:

$$\frac{1}{2}$$ (числитель) (знаменатель)

Верхнее число в дроби называется числителем, а нижнее — знаменателем.

Нижнее число — знаменатель — указывает, на сколько частей разделено целое. Например, футбольный матч разделен на две половины, или на два тайма.

Верхнее число — числитель — указывает, сколько таких частей взято. Можно говорить, к примеру, о трех четвертях торта или об одной из восьми равных долей, на которые разделена пицца.

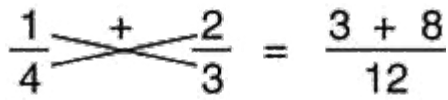
1/2 — это еще один способ сказать: «Единица, деленная на два». 6/3 означает 6, деленное на 3, и это один из способов, которым можно записать число 2.

Нам часто приходится складывать, вычитать, перемножать и делить части чего-либо. Это другой способ сказать, что мы часто складываем, вычитаем, перемножаем и делим дроби.

Ниже пойдет речь о том, как складывать и вычитать дроби.

Сложение

Сложение дробей не представляет труда. Чтобы сложить 1/4 и 2/3, мы перемножаем числители и знаменатели накрест, а затем перемножаем между собой знаменатели. А именно:



Перемножаем накрест:

1 x **3** = **3**

4 x **2** = **8**

Складываем два результата, чтобы найти числитель искомой дроби.

3 + **8** = **11**

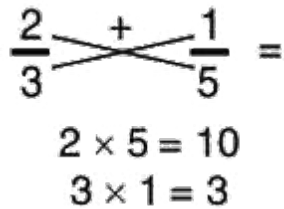
Для получения знаменателя искомой дроби находим произведение знаменателей: 4 x 3 = 12.

Ответ: 11/12. Легко, не так ли?

Возьмем другой пример:

2/3 + **1/5** =

Умножаем накрест:



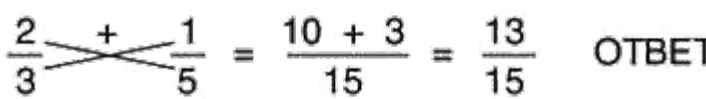
Сложим результаты, чтобы получить числитель искомой дроби.

10 + **3** = **13**

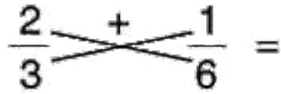
Перемножим знаменатели для получения знаменателя искомой дроби.

3 x **5** = **15**

Полностью решение выглядит следующим образом:



Другой пример:



Перемножаем накрест:

2 x **6** = **12**

3 x **1** = **3**

Сумма произведений дает нам числитель искомой дроби. Теперь найдем произведение знаменателей:

Это знаменатель дроби, получаемой в ответе.

$$\frac{12 + 3}{3 \times 6} = \frac{15}{18}$$ ОТВЕТ

Остался еще один шаг до полного решения задачи. Можно ли упростить полученный ответ?

Если числитель и знаменатель четные, мы можем сократить их на 2, что упростит ответ. Например, 4/8 — можно упростить до 2/4 и еще далее до 2.

В полученном выше ответе (15/18) элементы дроби не являются четными, однако и 15, и 18 без остатка делятся на 3 (15: 3 = 5, 18: 3 = 6).

Окончательным ответом является 5/6.

Всякий раз, когда вы проводите вычисления с дробями, следует добиваться самого простого ответа, какой только можно получить. Посмотрите, не делятся ли как числитель, так и знаменатель на 2, 3, 5 или любое другое число. Если делятся, то их следует разделить на это число, стремясь получить ответ, который далее уже нельзя сократить.

Например, 21/28 можно сократить до 3/4 (и 21, и 28 делятся 28 4 на 7).

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 1/4 + 1/3 = _; б) 2/5 + 1/4 = _; в) 3/4 + 1/5 = _; г) 1/4 + 3/5 = _

Ответы:

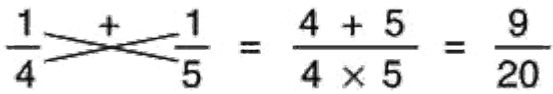
а) 7/12; б) 13/20; в) 19/20; г) 17/20

Еще один способ для ускорения вычислений

Имеется способ упростить вычисления с дробями. Если в

числителе обеих дробей стоит 1, мы складываем знаменатели, получая в результате числитель искомой дроби (верхнее число), и перемножаем знаменатели, получая знаменатель искомой дроби (нижнее число).

Рассмотрим это на примере:



Данный способ позволяет находить сумму и разность дробей без отыскания наименьшего общего знаменателя и часто позволяет «увидеть» ответ с одного взгляда.

Иными словами, вы должны быть в состоянии сразу «увидеть», что:

1/3 + 1/4 = 7/12

и что:

1/3 — 1/4 = 1/12

Если хотите сложить три дроби, сначала найдите сумму первых двух, а затем сложите полученную сумму и третью дробь.

Например:

1/3 + 1/2 + 2/5 =

Сначала:

1/3 + 1/2 = (3 + 2)/(3 x 2) = 5/6

Затем:

5/6 + 2/5 = (25 + 12)/(6 x 5) = 37/30

Числитель полученной дроби (37) больше знаменателя, поэтому вычитаем 30 из 37 (или делим 37 на 30), чтобы получить окончательный ответ:

$1^{7}/_{30}$

37 при делении на 30 дает 1 с остатком 7.

Вычитание

Аналогичный метод используется для вычисления разности:

2/3 — 1/4 = (8 — 3)/12 = 5/12

Снова перемножаем накрест, получая 2 x 4 = 8 и 1 x 3 = 3, которые в сумме дают число числителя искомой дроби. Затем перемножаем знаменатели, чтобы получить знаменатель искомой дроби.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 1/2 — 1/3 = _; б) 3/4 — 1/7 = _; в) 2–3 — 2/7 = _; г) 4/5 — 2/7 = _

Вычисления не представляют труда, когда знаешь, как обращаться с дробями.

а) 1/6; б) 17/28; в) 8/21; г) 16/35

Глава 21
Умножение и деление дробей

Когда вы суммируете дроби, в результате получается число, которое больше каждого из слагаемых. И когда вы вычитаете дроби, результат оказывается меньше, чем уменьшаемое, как и следует ожидать.

Операции умножения и деления дробей весьма отличаются от таких же операций с целыми числами, и поэтому многим кажутся сложными. Обычно при делении число (делимое) уменьшается, в случае же деления числа на дробь происходит увеличение делимого. И наоборот, умножение на дробь уменьшает число, произведение которого с дробью мы находим. Иными словами, это будто мир, в котором действия производят обратный эффект вопреки здравому смыслу.

Будучи подростком, я играл в юниорской футбольной команде. У нас была традиция: в третьем перерыве игры мы ели апельсины. Каждый получал четверть. В моей команде было 20 игроков, включая запасных. Сколько апельсинов требовалось, чтобы угостить каждого игрока его долей? Напомню, что каждый получал четверть апельсина.

Одного апельсина хватает на четверых, поэтому пять апельсинов хватит на 20 игроков. Из апельсина, деленного на четверти, получается 4 кусочка. Из пяти апельсинов, деленных на четверти, получается 20 кусочков. Пяти апельсинов, деленных на половины, хватило бы только на 10 игроков. Деление апельсинов увеличивает количество кусочков, которые можно раздать.

А как насчет умножения? Если бы четверть игроков были травмированы во время игры — это сколько игроков? Четверть от 20 равна 5. Почему бы нам не делить, чтобы узнать количество травмированных игроков? Делить на 4 — это то же самое, что умножать на четверть.

- Сколько получится, если 6 умножить на 10? 60.
- Сколько получится, если 6 умножить на 8? 48.
- Сколько получится, если 6 умножить на 5? 30.
- Сколько получится, если 6 умножить на 2? 12.
- Сколько получится, если 6 умножить на 1? 6.
- Сколько получится, если 6 умножить на 1/2? 3.
- Сколько получится, если 6 умножить на 1/3? 2.

Это кажется логичным. Чем меньше число, на которое вы умножаете, тем меньшим является результат.

Таким образом, сказать: «Возьмите половину от шести» — то

же самое, что сказать: «Умножьте шесть на одну вторую». Мы также знаем, что «половина от 6» является тем же самым, что и «6, деленное на 2».

Вернемся к определению, которое мы даем произведению. Произведение 3 x 7 равняется сумме трех семерок, то есть 7 плюс 7 плюс 7.

2 x 10 = 10 + 10.

А как насчет $1^1/_2$ x 10?

Речь идет о сумме 10 и половины от 10. Таким образом, произведение 10 x $1^1/_2$ — равно 15.

1/2, взятая 10 раз, просто равняется половине от 10, то есть 5.

Умножение дробей

Возможно, вы без вычислений знаете ответ на следующий пример:

1/2 x 1/4 =

Посмотрим, как ответ можно было бы рассчитать. Перемножаем верхние числа, то есть числители, и получаем числитель дроби ответа.

1 x 1 = 1

Перемножаем числа внизу, то есть знаменатели, и получаем знаменатель дроби ответа.

2 x 4 = 8

Ответ: 1/8.

Вот и вся операция умножения. Кто сказал, что с дробями трудно иметь дело? Совсем нетрудно. Попробуем решить еще один пример:

1/3 x 1/4 =

(Мы, по сути дела, спрашиваем: «Сколько будет четверть от одной трети или треть от одной четверти?»)

1 x 1 = 1 (числитель)

3 x 4 = 12 (знаменатель)

1/12 ОТВЕТ

Решим еще один пример:

2/3 x 1/2 =

Перемножим числители:

2 x 1 = 2

Затем знаменатели:

3 x 2 = 6

В ответе получаем дробь 2/6, которую можно сократить 1/3

Опять-таки, можно сразу догадаться, если спросить себя: с каким количеством третей мы имели дело с самого начала? С двумя. Теперь надо узнать, сколько будет половина от двух третей. Половина от 2 равна 1, поэтому ответом будет одна треть.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 1/2 x 1/3 = _; б) 1/2 x 1/5 = _; в) 2/3 x 2/5 = _; г) 1/12 x 1/14 = _

Чтобы решить последний пример, используйте метод умножения в уме чисел, которые больше 10, но меньше 20.

Ответы:

а) 1/6; б) 1/10; в) 4/5; г) 1/182

А как нам умножить $1^1/_2$ на $3^1/_4$?

Для начала мы преобразуем каждый множитель из смешанного числа в неправильную дробь. Смешанным называется число, содержащее как целую, так и дробную часть. Неправильная дробь — это дробь, у которой числитель больше знаменателя. 1

Чтобы перевести $1^1/_2$ в неправильную дробь, надо умножить целую часть (1) на знаменатель дробной части (2) и прибавить результат (2) к числителю дробной части (1), получая числитель неправильной дроби (3). Ответ: 3/2. (Полтора — это то же самое, что и три половины.)

Для того чтобы понять механизм перевода смешанного числа в неправильную дробь, посмотрим на 1 и половину. Сколько половин содержится в 1? Ответ прост: 2. Плюс одна половина, обозначаемая дробью, что дает в сумме 3 половины.

Проделаем то же самое с $3^1/_4$. Умножим целую часть (3) на знаменатель дробной части (получаем 12/4) и прибавим результат к числителю дробной части (1). Ответ: 13/4. Теперь можно записать исходный пример так:

3/2 x **13/4** =

Перемножим числители: 3 x 13 = 39. Получили числитель искомой дроби. Теперь перемножим знаменатели:

2 x 4 = 8.

Ответ: 39/8.

Как нам снова преобразовать ответ в смешанное число?

Для этого разделим 39 на 8. Ответом будет 4 (8 x 4 = 32) с остатком 7.

Получаем: $39/8 = 4^7/_8$.

А что, если вам нужно умножить целое число на дробь?

Попробуем перемножить 7 и 3/4. Это можно выразить по-другому: «Сколько будет три четверти от 7?» Три четверти от 8 равны 6, поэтому наш ответ будет немного меньше 6.

Выразим 7 в виде дроби, а именно: 7/1.

7/1 x **3/4** =
7 x **3** = **21**
1 x **4** = **4**
21/4 ОТВЕТ

Чтобы перевести ответ в смешанное число, разделим 21 на 4 и получим $5^1/_4$. (21 делится на 4 пять раз с остатком 1.)

Деление дробей

Чтобы найти половину любого числа, необходимо разделить его на 2. Например, половина от 6 равна 3. Это можно записать следующим образом:

6/1 x **1/2** = **3**

Или же можно выполнить одно из следующих действий:

6: **2** = **3**
6/1: **2/1** = **3**

Правило такое:

Чтобы разделить число на дробь, ее необходимо перевернуть, то есть поменять местами числитель и знаменатель, а затем умножать число на полученную дробь.

6: **1/4** = **6** x **4/1** = **24**

Выразить иначе это можно так: «Сколько четвертей можно получить из шести апельсинов?» Вы делите 6 апельсинов на четверти и в итоге получаете 24 четверти — достаточное количество, чтобы угостить всех игроков (вместе с запасными), тренера и массажиста, и при этом пару штук еще останется.

Разделив 2 торта на кусочки величиной в одну шестую (1/6), вы получите 12 кусочков. В итоге вы смогли бы угостить тортом 12 человек.

Таким образом, 2 при делении на 1/6 дает 12.

Вычисление выглядит следующим образом:

2: **1/6** = **2/1** x **6/1** = **12/1**

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 1/3: 3/4 = _; б) 7/8: 2/3 = _; в) 2/7: 4/5 = _

Ответы:

а) 4/6; б) 21/16; в) 5/14

в) Третий пример решается так:

2/7: 4/5 = **2/7** x **5/4**
2 x **5** = **13** (числитель)
7 x 4 = **28** (знаменатель)

Ответ: 10/28. Оба — и числитель, и знаменатель — являются

четными числами, поэтому мы можем разделить их на 2, получив в качестве окончательного ответа 5/14.

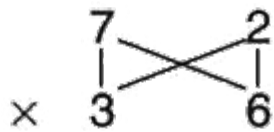
Глава 22
Прямое умножение

Простой способ найти произведение чисел, для которых трудно сходу подобрать подходящее опорное число, предлагает так называемое прямое умножение. Это обычный метод, используемый людьми, которые молниеносно считают в уме.

Например:

36 x 72 =

Вот каким образом следует представить себе данную задачу, когда человек взялся решать ее в уме:



Вычисление следует вести слева направо, начав с произведения 70 на 30. Перемножаем 7 и 3 и умножаем ответ на 100. (На практике следует перемножить 7 и 3, а затем приписать два нуля к результату.)

7 x 3 = 21

21 x 100 = 2100

Это наш первый промежуточный результат. Теперь перемножаем накрест: 7 x 6 и 3 x 2, а затем суммируем результаты умножения.

7 x 6 = 42

3 x 2 = 6

42 + 6 = 48

Умножим последний результат на 10 и прибавим к нашему промежуточному результату.

48 x 10 = 480

2100 + 480 = 2580

Если вы скажете про себя: «Две тысячи сто плюс четыреста. две тысячи пятьсот, плюс восемьдесят. две тысячи пятьсот восемьдесят», то у вас не будет проблем с выполнением всего расчета в уме.

Теперь перемножим цифры единиц. Произведение 6 x 2 равно 12. Прибавим 12 к нашему текущему промежуточному результату и получаем в ответе 2592.

2580 + 12 = 2592 ОТВЕТ

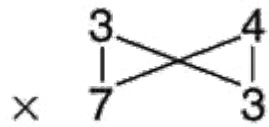
Ведя расчет слева направо, мы получаем приближенное значение ответа после первого шага. С каждым шагом мы получаем все более точный ответ.

При этом все вычисления могут выполняться в уме.

Попробуем решить другой пример:

34 x **73** =

Представляем задачу следующим образом:



Умножаем: 7 x 3 = 21, плюс два нуля (поскольку речь идет о разряде десятков), получаем промежуточный результат 2100.

Теперь перемножаем накрест и складываем:

(**3** x **3**) + (**7** x **4**) =

9 + **28** = **37**

Добавляем один нуль к результату, чтобы учесть тот факт, что мы умножали десятки на единицы. Получаем 370.

При этом мы скажем про себя: «Две тысячи сто плюс триста. две тысячи четыреста. плюс семьдесят. две тысячи четыреста семьдесят».

Наш промежуточный результат равен 2470. Теперь перемножим цифры единиц.

4 x **3** = **12** **2473** + **12** = **2482 ОТВЕТ**

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 42 x 74 = _; б) 37 x 64 = _; в) 27 x 81 = _; г) 34 x 72 = _

Разве не впечатляет вас тот факт, насколько легко вам удается решать данные примеры в уме?

Ответы:

а) 3138; б) 2368; в) 2187; г) 2448

Данный метод можно применять в тех случаях, когда способ быстрого умножения не приходит в голову.

Умножение на однозначное число

Прямое умножение на однозначное число также не представляет труда.

Чтобы умножить 43 на 6, умножим 40 на 6, а затем прибавим 3 шестерки. Умножая 40 на 6, вычисляем, сколько будет 6 x 4, и

просто приписываем нуль справа.

6 x **4** = **24**

24 x **13** = **243**

3 x **6** = **18**

243 + **18** = **258**

Очень просто, не правда ли? Легче, чем использовать опорные числа и нашу универсальную формулу умножения.

А как насчет 6 x 17?

6 на 10 дает 60 и плюс 6 на 7, что равняется 42. Получаем в ответе 102.

Скажем, нам требуется вычислить, сколько будет 6^3. Это то же самое, что 6 x 6 x 6, то есть произведение трех шестерок.

Перемножаем первые две:

6 x **6** = **36**

Теперь надо умножить результат на 6. Для этого мы сначала умножаем 30 на 6, потом 6 на 6 и складываем оба результата:

6 x **33** = **180**

Прибавляя 6 x 6 = 36, получаем:

180 + **36** = **216**

Чтобы сложить 180 и 36, я прибавил бы сначала 20 из 36, получив 200, а затем приплюсовал бы оставшиеся 16, что дает окончательный ответ 216.

Прямое умножение на однозначное число не представляет труда и со временем позволяет решать задачи на умножение почти автоматически.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 7 x 13 = _; б) 8 x 23 = _; в) 6 x 42 = _; г) 9 x 26 = _; д) 6 x 124 = _; е) 8 x 206 = _

Ответы:

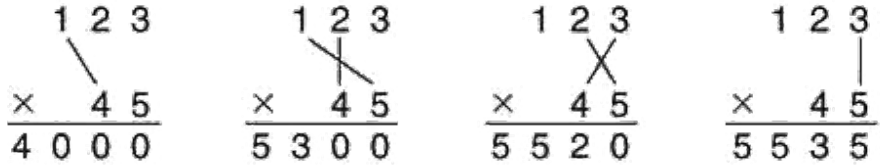
а) 91; б) 184; в) 252; г) 234; д) 744; е) 1648

Подсказка для решения примера д): умножьте 6 на 120, а затем прибавьте 6 x 4.

Все ли у вас получилось? Большинство людей чувствуют себя неуверенно с подобными вычислениями, находя их сложными. Умение дать быстрый ответ на подобного рода задачу сделает вас в глазах окружающих высокоинтеллектуальным и математически одаренным человеком.

Умножение чисел с двумя и более знаками

Попробуем найти произведение 123 x 45:



Сначала мы умножаем 1 на 4. Затем вычисляем сумму 1 х 5 и 2 х 4. Затем сумму 2 х 5 и 3 х 4. И наконец, вычисляем 3 х 5. Все это складываем с учетом разрядов, то есть с учетом того, сколько нулей должно быть приписано справа к каждому ответу. А именно:

100 х **40** = **4000**

(Четыре раза по 100 равно 400, после умножения на 10 получаем 4000.)

100 на 5 равно 500, плюс 20 х 40, равное 800, получаем 1300.

4000 + **1300** = **5300**

20 на 5 равно 100, плюс 3 х 40, равное 120, получаем 220.

5300 + **220** = **5520**

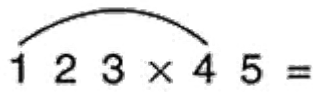
5 на 3 равно 15.

5520 + **15** = **5535 ОТВЕТ**

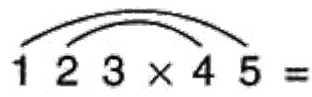
Чтобы добраться до ответа, мы получили три промежуточных результата (4000, 5300, 5520) и окончательный (5535).

Стандартное умножение в столбик подразумевает, что мы сначала получаем цифру единиц ответа, то есть 5. Хотя 232 можно выполнять прямое умножение как слева направо, так и справа налево, начиная с цифр более высокого порядка, мы сразу получаем промежуточный результат, очень близкий к фактическому ответу.

Представить механизм перемножения можно другим способом:

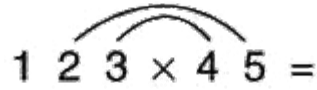


Произведение 100 х 40 равно 4000. Промежуточный результат будет 4000.

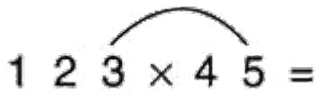


100 х 5 = 500, плюс 20 х 40 = 800 — получается 1300.

Промежуточный результат равен 5300.

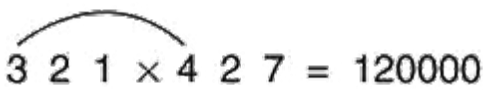


5 x 20 = 100, плюс 3 x 40 = 120, — получается 220. Новый промежуточный результат равен 5520.

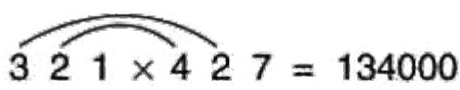


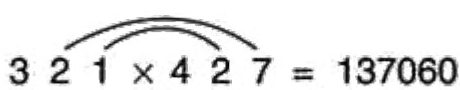
3 x 5 = 15. Окончательный результат: 5535.

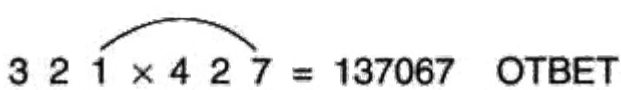
Чтобы найти произведение 321 x 427 на бумаге, все, что нужно, — это записывать результат.



Прибавляйте столько нулей, сколько в сумме цифр после перемножаемых вами цифр.







Можно помогать себе, указывая пальцем на цифры, подлежащие перемножению в данный момент.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно. Сначала попробуйте решить их на бумаге, а затем сразу назвать ответ, выполнив расчеты в уме.

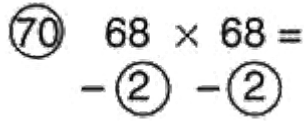
а) 123 x 345 = _; б) 204 x 436 = _; в) 623 x 316 = _; г) 724 x 315 = _

Ответы:

а) 42435; б) 88944; в)196868; г) 228060

Можно комбинировать прямое умножение с методом, где используется опорное число. В случае последнего мы стараемся выбирать простые опорные числа вроде 10, 20, 50 и 100. Если же приходится использовать такие числа, как 30 или 70, то можно применить комбинацию с методом прямого умножения.

Если бы вам, к примеру, требовалось перемножить 68 и 68, вы использовали бы 70 в качестве опорного числа.



Вычитаем накрест:

68 — 2 = 66

Чтобы найти промежуточный результат, мы должны умножить 66 на опорное число 70. Используем прямое умножение:

70 x **66** =

60 x **70** = **4200**

6 x **70** = **420**

4200 + **420** = **4620**

Теперь перемножим числа в кружках и прибавим ответ к нашему промежуточному результату:

2 x **2** = **4**

4620 + **4** = **4624**

Интересно, что в данном примере мы могли бы использовать один из наших способов быстрого получения ответа. Речь идет о том, чтобы разбить 66 на множители: 6 x 11.

Тогда пример можно представить так: 7 x 6 x 11 x 10.

7 x **6** = **42**

42 x **11** = **462** (способ умножения на 11)

462 x **10** = **4620**

Перемножая числа в кружках и прибавляя ответ к промежуточному результату, получаем 4624.

Метод прямого умножения делает возможным использование любого опорного числа.

Глава 23
Приближенное вычисление

Давать приближенную численную оценку тем или иным вещам приходится довольно часто в повседневной жизни. Во что обойдется содержание вашей машины в этом году? На сколько большими будут расходы на ремонт? Сколько придется заплатить банку в счет покрытия кредита? Точно так же, когда мы переводим одну валюту в другую, очень трудно получить точную сумму. Курс меняется каждый день. Мы не знаем, сколько банк захочет получить за сделку в качестве комиссии. В лучшем случае наши расчеты являются приближением того, что будет на самом деле.

Однажды в супермаркете я покупал продукты и вдруг сообразил, что у меня в кошельке всего одна 20-долларовая банкнота.

Я пересмотрел продукты в моей тележке и обнаружил, что их стоимость в сумме составляла около 22 долларов. Я вынул из тележки продукты на сумму около 3,5 доллара, положил обратно на полку и пошел к кассе.

Тогда еще не было сканеров, поэтому кассирша вручную пробила стоимость моих продуктов на кассовом аппарате.

Она сказала мне: «С вас двадцать шесть долларов и сорок центов».

Я ответил: «Извините, но вы ошиблись. Здесь продуктов меньше чем на двадцать долларов».

Кассирша возмутилась и вызвала менеджера.

«Что случилось?» — спросил он.

Она объяснила: «Вот, господин говорит, что я ошиблась, пробивая ему чек».

«А как вы это определили?» — спросил менеджер, с подозрением глядя на меня.

Я объяснил, что у меня в кошельке всего 20 долларов, поэтому я набрал продуктов на такую сумму.

Мы сверили то, что было в моей тележке, с чеком и обнаружили, что кассирша в одном случае забыла ввести десятичную запятую. Если бы я не подсчитал в уме, то никогда не заметил бы ошибки. Позднее я узнал, что кассирша в тот день впервые вышла на работу, и поэтому почувствовал себя немного виноватым.

В математике также нужны приближенные оценки. Речь идет о том, что иногда нам не требуется точный ответ, а лишь

приближенное значение. Приближенная оценка — это навык, который вы легко можете приобрести и развить в себе.

Как нам оценить сумму, которую придется заплатить за товары в супермаркете? Следует округлить все цены до ближайшего числа. В одних случаях округление будет в сторону увеличения, в других — в сторону уменьшения. Это простой способ получить довольно точную оценку общей суммы, которую вам надо будет заплатить, и вы определите, хватит ли денег в вашем кошельке, чтобы рассчитаться с кассиром. Попробуйте проделать это во время очередного визита в супермаркет и посмотрите, насколько точной может быть ваша оценка.

Примеры практического применения

Сколько человек сидит в аудитории?

Мы окидываем взглядом аудиторию и видим, что практически все места заняты. Считаем количество рядов. Их оказывается 16. Сколько человек сидит в одном ряду? Мы насчитываем 20 мест в ряду, однако среднее количество занятых мест составляет примерно 14. Количество студентов в рядах разное, но средним числом, как нам кажется, является 14.

Умножаем 14 на 16 и получаем 224. Хотя ответом является вполне реальное число, мы ведем речь всего лишь об оценке фактического количества. Мы сказали бы в такой ситуации: «Чуть больше двухсот человек».

Во сколько вам обойдется отпуск в этом году?

Следует учесть оплату стольких-то ночей в гостинице, такие-то расходы на бензин и аренду автомобиля, столько-то на еду, а также на прочие покупки, например сувениры. Сложив все это вместе, получим примерную стоимость отпуска. Опыт путешествий подсказывает нам, что к полученной сумме следует прибавить 50 процентов, поскольку цены на все, как правило, оказываются выше, чем мы предполагали.

Во сколько вам обойдется подержанная машина?

Правильно будет, сколько бы вы ни заплатили за саму машину, добавить еще 1000 долларов на ремонтные работы, которые, скорее всего, потребуется выполнить после того, как машина станет вашей. Я всегда говорю своим друзьям: включайте в стоимость приобретаемой машины будущий ремонт. Если он не потребуется, то вы выиграете в деньгах. Это как премия. Если же ремонт все-таки будет нужен, тогда вы не будете чувствовать себя

так, будто вас обобрали.

Сколько примерно будут стоить 227 штук товара по цене 485 долларов за каждую?

Если мы не знаем, какую окончательную сумму у нас попросят, можно оценить ее приблизительно и затем попытаться сбить цену. Какой приблизительно будет общая стоимость? Округлим числа до 200 и 500 соответственно, перемножим и получим в результате 100000. (Обратите внимание, что я округлил одно число в сторону увеличения, а другое — в сторону уменьшения, чтобы свести к минимуму ошибку приближения.)

Можно оценить и по-другому, перемножив 230 и 480 с использованием методов, рассмотренных в настоящей книге:

$$\begin{array}{c} \textcircled{50}\ \ 23 \times 48 = \\ -\textcircled{27}\ \ -\textcircled{2} \end{array}$$

$$21 \times (100 : 2) = 1050$$

$$-27 \times -2 = 54$$

$$1050 + 54 = 1104$$

Таким образом, результатом нашей оценки является сумма, примерно равная 110000 долларов. Этот и полученный ранее результаты могут быть взяты за основу. С учетом этого можно, наверное, надеяться на то, что цену удастся сбить до 105000 долларов.

Простым способом приближенного вычисления является округление чисел до значимых для ответа цифр. Остальные цифры при этом превращаются в нули.

Ваш брат купил 253 подержанных копировальных аппарата за 10000 долларов. Сколько он заплатил за каждый из них?

Чтобы вычислить точный ответ, необходимо разделить 10000 на 253. Если при вас нет калькулятора, можно дать достаточно близкий к фактическому приближенный ответ путем округления соответствующих чисел.

Для оценки ответа разделим 10000 на 250. 250 — это четверть тысячи, поэтому можно разделить на 1000 и умножить результат на 4.

10000 при делении на 1000 дают 10. (По сути, вы задаете следующий вопрос: сколько тысяч содержится в десяти тысячах?)

10 x 4 = 40. Фактическая цена за один копировальный аппарат составляет чуть меньше 40 долларов, а именно — 39,53 доллара. Нашу оценку следует признать достаточно точной.

Вычисляя приближенное значение результатов сложения, вычитания, умножения и деления, мы просто округляем каждое число до ближайшего. Если одно число мы округляем в большую сторону, тогда другое следует округлять в меньшую.

Зачем нам нужны приближенные вычисления, если калькулятор всегда даст точный ответ?

Во-первых, в вышеприведенных примерах вы не уверены, какими являются величины, поэтому ввести в калькулятор можно лишь приближенные числа. Во-вторых, калькуляторы на самом деле сделали приближенное вычисление в уме еще более необходимым, и сейчас я объясню почему.

Однажды я попросил класс выполнить следующее вычисление.

Цена бензина составляет 1,30 доллара за галлон. Вы заправляете 18 галлонов в бак. Сколько вы заплатите за бензин?

Один ученик получил ответ в несколько миллионов долларов. Я спросил у него, считает ли он свой ответ правильным. Он ответил, что да, считает, поскольку получил его с помощью калькулятора.

Тогда я спросил его, является ли 1,30 доллара нормальной ценой за галлон бензина. Ученик ответил: «Да, конечно». Тогда я спросил, может ли вместить 18 галлонов бензобак автомобиля его отца. Он опять ответил утвердительно и даже указал, какая в действительность вместимость бака в автомобиле его отца.

Наконец я спросил, платил ли его отец когда-нибудь три миллиона долларов за бак горючего. Тогда до него дошло. Калькулятор дал ответ, но неправильный. Ученик, скорее всего, нажал не на ту кнопку. Настоящий ответ у этой задачи — 23,40 доллара.

Многие люди принимают ответ, полученный на калькуляторе, за истину в последней инстанции. Нужно уметь вычислять в уме приближенное значение ответа, чтобы быть уверенными в том, что мы не допустили ошибки, считая на калькуляторе.

Глава 24
Применяем то, чему научились

Мы сталкиваемся с математикой каждый день. Всякий раз, когда что-нибудь покупаем, когда слышим от кого-нибудь или сообщаем кому-либо текущее время, даже когда садимся в машину, мы прибегаем к математическим вычислениям. Каким временем я располагаю? Шесть часов сорок минут — это то же самое, что и без двадцати семь. Сколько денег я должен дать кассиру? Хватит ли у меня в кошельке денег, чтобы сделать эту покупку? Сколько мне надо откладывать каждый месяц, чтобы хватило на покупку дома или новой машины? Достаточно ли у меня времени, чтобы доехать до города? Все это математические вычисления. В настоящей главе вы узнаете, как базовые знания математики способны помочь вам в повседневной жизни.

Путешествия за границу

Посещая незнакомые страны, одни люди с удовольствием узнают новые традиции, достопримечательности, культуру, язык, другие же чувствуют себя некомфортно в чужой для них обстановке.

Мне нравится разнообразие. Если бы все в мире было одинаковое, то и ездить никуда не имело бы смысла. В чужой стране мне нравится осваивать новую для меня валюту, единицы измерения, шкалу температур и т. п. Зачастую, впрочем, нам приходится переводить такие единицы измерения в систему, принятую в родной стране, чтобы нас могли понять. Кроме того, нам часто приходится сверять курс валют, чтобы оценить, разумно ли мы платим за ту или иную вещь. Все это требует от нас математических знаний.

Перевод температур из одной шкалы в другую

Если вы приехали в страну, где используется температурная шкала Фаренгейта, а не Цельсия, или наоборот, вам может

пригодиться умение переводить значения температуры из одной шкалы в другую. Слушая, к примеру, прогноз погоды, вы хотели бы знать, следует вам надеть пальто на прогулку или что-нибудь полегче. Согласно формуле перевода из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия, из величины температуры следует отнять 32 градуса и умножить полученную разность на 5, а затем разделить на 9. Это несложно, если использовать методы, изложенные в этой книге, однако, возможно, мы можем обойтись менее точной, но более простой формулой. А формула эта такая:

Чтобы перевести значение температуры по Фаренгейту в значение по Цельсию, надо вычесть 30 градусов и разделить полученную разность пополам.

Чтобы перевести значение температуры по Цельсию в значение по Фаренгейту, необходимо удвоить его и прибавить к результату 30 градусов.

Значение, полученное с помощью этой формулы, будет близким к точному значению в достаточной для практических целей степени. Например, если вам сказали, что завтра температура воздуха будет 8 ˚C, удвойте это значение и прибавьте к результату 30. Удвоенное 8 равно 16, плюс 30 — получаем 46˚ F. Фактическая температура, согласно точной формуле, равна 46,4˚ F. Для практических нужд полученное нами приближенное значение вполне годится.

А что делать, если вы приехали в страну, где температуру измеряют с помощью шкалы Фаренгейта, а не привычной для вас шкалы Цельсия? Если вам скажут, что температура воздуха завтра будет 72˚ F, отнимите 30 (42) и затем возьмите половину. Ответом будет 21 ˚C. Перевод по точной формуле даст нам значение около 22 ˚C. Мы ошиблись на один градус, однако вполне адекватно будем представлять, какая будет температура.

Простые формулы для перевода значений температуры из одной шкалы в другую:

(˚C x 2) + 30 = ˚F

(˚F — 30): 2 = ˚C

А вот формулы для точного перевода значений одной температурной шкалы в значения другой шкалы и обратно:

˚C x 9/5 + 32 = ˚F

(˚F — 32) x 5/9 = ˚C

Попробуем перевести из одной шкалы в другую на конкретном примере, при этом в уме и с помощью каждой из указанных выше формул:

Перевести 80˚ F в ˚C

Сначала по простой формуле: вычтем 30 из 80, получим 50, взяв половину, получим температуру по Цельсию. 80˚ F = 25 ˚C.

Теперь по точной формуле:
(80 – 32) x **5/9** =
80 – 32 = 48
48 x **5 = 240**
240/9 = 26,67 ˚C
Рассмотрим другой пример:
Перевести 10 ˚C в ˚F
Используем сначала точную формулу:
10 x **9/5 + 32** =
10 x **9 = 90**
90/5 = 18
18 + 32 = 50˚ **F**
Используя теперь простую формулу, получим: удвоенное 10 дает 20, затем прибавим 30 и получим в ответе 50˚ F.

В первом случае упрощенная формула дала нам ответ, который был близок к истинному, а во втором полученное по упрощенной формуле значение вообще равнялось вычисленному по точной формуле.

Если опасаетесь, что можете забыть, в каком случае надо отнимать 30, а в каком прибавлять либо когда надо брать половину значения или, наоборот, его удваивать, рекомендую запомнить пару соответствующих значений температур в разных шкал. Помня их, вы всегда сможете восстановить в памяти формулу.

Например, если запомнить, что 100˚ F соответствуют 37 или 38 ˚C, то как можно из 100 получить 37? 100 минус 30 равняется 70. Половина от 70 равна 35. Почти получили требуемое. Если же теперь осуществить обратный переход, то нужно удвоить 35, получив 70, и прибавить 30, что даст в ответе 100. Таким образом, мы проверили справедливость формулы в обе стороны.

Другой хорошо известной парой эквивалентных значений в двух рассматриваемых температурных шкалах является точка замерзания воды: 0 ˚C и 32˚ F. Вычтем 30 из 30˚ F и получим 0 ˚C.

Неплохо запомнить также, какому изменению по одной шкале будет соответствовать некое фиксированное изменение по другой шкале. 10 ˚C соответствуют 50˚ F. Уменьшим или увеличим на 10 ˚C. 20 ˚C = 68˚ F. (То есть изменению на 10 градусов по шкале Цельсия соответствует изменение на 18 градусов по шкале Фаренгейта.)

Рассмотрим пример:
Перевести 15 ˚C в ˚F
Точная формула дает:
15 x **9/5 + 32** =
15 x **9 = 135**

135/5 = 27
27 + 32 = 59° F
Теперь воспользуемся более простой формулой:
15 x **2 = 30 30 + 30 = 60° F** — ошибка в 1 градус
Еще пример:
Перевести 20 °C в °F

—
20 x **9/5 + 32 =**
182/5 = 36
36 + 32 = 68° F
По более простой формуле:
20 x **2 = 40 40 + 30 = 70° F** — ошибка в 2 градуса
Вполне приемлемый результат, который никак не скажется на выборе одежды для прогулки.

Время и расстояние

Другим видом перевода из одной шкалы в другую, с которым можно столкнуться, путешествуя по свету, является перевод дюймов в сантиметры. 1 фут равен 30 сантиметрам. При делении 30 на 12 (количество дюймов в одном футе) получаем примерно $2^1/_2$. Таким образом, один дюйм равен примерно 2,5 сантиметра.

Имея дело с разницей между временными поясами, стоит зафиксировать в памяти определенный момент времени. Выберите подходящее время, когда вы обычно звоните домой, скажем, из заграничной командировки, и запомните эквивалентный момент времени в поясе, где находится ваш дом.

Например, я провожу много времени в разъездах между Мельбурном и Ванкувером. Мне часто необходимо знать время в обоих городах. Я просто запомнил для себя, что, когда в Мельбурне 12 часов пополудни, в Ванкувере будет 5 часов после полудня предыдущего дня. Чтобы узнать, какому времени в Ванкувере соответствуют 2 часа дня в Мельбурне, я просто прибавляю 2 часа к 5 часам вечера, получая 7 часов вечера. 2 часа дня в Ванкувере соответствуют 9 часам утра в Мельбурне. Таким образом, вместо того чтобы прибавлять к местному времени или вычитать из него 19 часов, я исхожу от момента времени, который запомнил.

Обмен валюты

Когда я недавно был в Соединенных Штатах, австралийский доллар стоил примерно 65 центов США. Чтобы рассчитать, сколько вещь стоила в австралийских долларах, я делил ее цену в американских деньгах на 0,65. Я также мог бы сначала удвоить цену, а затем разделить на 1,3 или же разделить цену сначала на 1,3, а затем удвоить результат. Также давайте взглянем на перевод в обратную сторону. 1 доллар США равняется примерно 1,50 австралийского доллара. Таким образом, расчет эквивалентной суммы не представляет труда. 40 долларов США будут равняться 40 и еще половине этой суммы долларам Австралии, то есть 60 долларам США. С тех пор как я был в США, курс обмена изменился, однако подход остается тем же с любой валютой и любым обменным курсом.

Скорость и расстояние

Запомните раз и навсегда, что 100 километров равняются 60 милям. После этого умножайте или делите на 0,6 в зависимости от того, что во что переводите.

Запомните также, что 60 миль/ч — это то же, что 1 миля в минуту. Двигаясь со скоростью 100 км/ч, вам потребуется 30 минут, чтобы проехать 30 миль.

Я также помню о времени, за которое проезжаю то или иное расстояние, двигаясь со скоростью 100 км/ч. Чтобы проехать 250 километров, потребуется 2 с половиной часа. А на расстояние 25 километров потребуется четверть часа. Поэтому, если до места назначения мне остается 175 километров, я знаю, что пройдет около часа с тремя четвертями, прежде чем я доеду.

Сколько будет 50 километров в час в милях в час? Поскольку 100 километров равняются 60 милям, то 50 километров равняются 30 милям. Поэтому 50 км/ч равны 30 милям/ч.

Фунты в килограммы

1 килограмм равняется 2,2 фунта. При переводе килограммов в фунты вы умножаете число килограммов на 2,2.

Переводя же фунты в килограммы, мы делим количество

фунтов на число 2,2, представляющее собой произведение 11 x 0,2.

Сколько фунтов веса в человеке, который весит 65 килограммов?

65 x **0,2** = **13**

13 x **11** = **143 фунта**

Спортивная статистика

Наблюдая за игрой, будь то на стадионе или по телевизору, ведите статистику самостоятельно. Каково число пробежек в пересчете на отбитые мячи, процент выигранных на базе очков у каждого игрока, среднее число выигранных пробежек у подающего? Практически в каждой игре ведется своя статистика, которая одновременно делает игру более увлекательной и улучшает ваши познания в математике.

Оценка расстояний

Когда еду за рулем в Ванкувере (Британская Колумбия, Канада), я знаю, что улицы и проспекты нумеруются здесь из расчета восемь на милю. Если я только что пересек 16-ю, а мне надо на 86-ю, то я знаю, сколько мне еще остается проехать, и могу подсчитать, сколько времени у меня на это уйдет. Мне осталось пересечь 70 улиц. 70 при делении на 8 дает примерно 9. Значит, мне осталось проехать почти 9 миль, или, если быть более точным, $8^{3}/_{4}$ мили.

Другие дельные советы

Измерьте диаметр различных монет и затем используйте их в качестве измерительных инструментов, если под рукой нет линейки или рулетки. Измерьте длину своего большого пальца. Измерьте, сколько сантиметров у вас от кончика большого пальца до кончика среднего, после того как развели их насколько

сможете. Узнайте длину одного своего шага. Измерьте длину своей стопы и подошвы ботинок. Какова длина вашей руки от плечевого сустава до кончиков пальцев? Каково расстояние между вашими руками, когда вы развели их в стороны? Какова длина листа бумаги того или иного формата (например, А4)?

Используйте все это для приблизительного измерения длины, ширины и т. п.

Пройдя расстояние в 1 километр или 1 милю, подсчитайте количество сделанных вами шагов. Затем разделите число шагов на пройденное расстояние, тем самым узнав среднюю длину вашего шага. Измерьте с помощью секундомера, сколько времени вам требуется на то, чтобы пройти 1 милю или 1 километр. После этого можно вычислить среднюю скорость, с которой вы передвигаетесь пешком, и на основании этого определять, сколько времени у вас уйдет на то, чтобы пройти то или иное расстояние (можно также рассчитать, какое расстояние вы прошли, судя по затраченному времени).

Вычисляйте вместимость зрительного зала, придя в кино или театр. Общее число мест определяйте путем перемножения количества рядов на количество мест в ряду. Какова вместимость зала в вашем любимом театре?

Вам известна длина окружности Земли? Она равна примерно 24000 миль, или 40000 километров. На экваторе точка на земной поверхности перемещается со скоростью примерно 1000 миль/ч. Иными словами, на экваторе ширина часового пояса составляет примерно 1000 миль. Поскольку длина экватора составляет 24000 миль, ее легко разделить на зоны, соответствующие каждому часу в сутках. Переводя мили в километры, получаем, что 1000 миль равняется примерно 1600 километров.

Применение изученных методов

Используйте изученные в данной книге подходы и методы не только в школе или на работе, но и в качестве способа разнообразить свой досуг. Производите в уме всевозможные вычисления, путешествуя за рулем автомобиля или приехав туристом в другую страну. Используйте их, наблюдая за игрой любимой команды. Пользуйтесь ими, делая покупки в магазине. И, разумеется, находите им применение в школе и на работе. Это закрепит математические навыки, повысит вашу сообразительность и поможет вам принимать более взвешенные

решения.

Послесловие

Как-то я преподавал в пятом классе. Закончив объяснять детям, как перемножать числа больше 10 и меньше 20, я заметил девочку, которая пыталась вычислить, сколько будет 109 на 109. Она нарисовала кружки с числами вверху, использовав 100 в качестве опорного числа, и получила в ответе 11881. Девочка спросила у меня, правильный ли у нее получился ответ. Она не спрашивала, допустила ли ошибку в своих вычислениях. Ее интересовало, годился ли такой метод в качестве решения. Я заверил девочку, что она была права как в первом, так и во втором случае.

Работая в качестве приходящего учителя, я встречаю подобную реакцию сплошь и рядом. Дети обожают экспериментировать. Это, возможно, для меня самая большая награда. Дети начинают мыслить как математики. Кроме того, увидев результат своего труда, они не жалеют усилий на решение еще более сложных задач. Раззадорившись, дети часто просят учителя, чтобы он задавал им все новые примеры.

Когда человек делает собственные математические открытия, впечатление от этого остается незабываемое. Методы, изложенные в настоящей книге, помогают развить творческое мышление и навыки решения задач, что в реальной жизни зачастую оборачивается решением практических проблем. Они закладывают основу для умения мыслить оригинально и за пределами поставленных рамок, с привлечением латерального мышления. Овладение предложенными здесь методами станет прочным фундаментом для системы ваших собственных математических знаний и навыков, позволит вам накрепко усвоить суть операций над числами. Методы эти легко доступны и применимы в повседневной жизни. Используйте то, что вы узнали. Доставляйте себе радость от новых математических открытий. Экспериментируйте с освоенными стратегиями вычислений.

Пожелание учащимся

Используйте в своей учебе изложенные здесь приемы и методы, и вы приобретете репутацию гения. Задачи вы будете щелкать как орешки, и математика станет для вас увлекательной и легкой дисциплиной.

Пожелание учителям

Преподавайте изложенные здесь методы своим ученикам, и

уроки математики превратятся в удовольствие как для них, так и для вас. Использование данных методов — залог успеха ваших учеников, а следовательно, и ваш успех. Кроме того, когда ученики преуспевают, они лучше соблюдают дисциплину и имеют более высокую мотивацию к учебе. В итоге выигрывают все.

Пожелание родителям

Научите своих детей этим методам, и вы увидите, как их дела в школе по математике пойдут в гору. Они будут не просто считать быстрее своих сверстников, но и уметь проверять полученный ответ, а также исправлять допущенную ошибку еще до того, как кто-нибудь другой успеет ее заметить. Данные методы придадут вашим детям уверенность в своих силах не только в математике, но и в других областях, где от человека требуется высокий интеллект. Люди сплошь и рядом отождествляют математические способности с высоким интеллектом, и можно ожидать, что успехи ваших детей в других дисциплинах также улучшатся.

Многим детям свойственна низкая самооценка, они считают себя «тупыми». Им кажется, что у них нет способностей к математике, поскольку им трудно решать даже элементарные задачи. Вместе с тем родители пишут мне, что после того, как их дети познакомились с моими методами, они просто обожают математику. Дети в восторге от того, что некогда трудные примеры стали им теперь по силам. Также помогает похвала со стороны взрослых. Дело не в мозгах того или иного ребенка — важно научить его способам и приемам решения проблем, в данном случае математических.

Эта книга написана на основе многочисленных экспериментов по применению изложенных методов и приемов. Я старался написать ее предельно простым языком, чтобы каждый смог понять то, что в ней содержится.

Я разместил сборники примеров и задач на своем вебсайте. Там же представлена информация о других материалах, которые я могу предложить. Если вы хотите высказать замечания по поводу данной книги или узнать о новых работах и других учебных материалах, пожалуйста, пишите мне по электронному адресу bhandley@speedmathematics.com или посетите мой веб-сайт www.speedmathematics.com.

Приложение А
Вопросы, которые мне часто задают

Вопрос. *Мой ребенок уже сейчас лучший в классе по математике. Не приведут ли ваши методы к тому, что он начнет скучать на уроках? Что делать детям, если они закончат решать примеры за четверть того времени, которое требуется для этого другим?*

Вопрос. *Если я начну использовать ваши методы, то буду решать быстрее и у меня будет оставаться время, которое чем-то надо занять. Я просто буду скучать на уроках.*

Ответ. Ученики, которые применяют данные методы, обожают экспериментировать. Действительно, они решают задания намного быстрее своих одноклассников. Но затем они проверяют свои ответы, применяя метод выбрасывания девяток и одиннадцати. Кроме того, у них остается время на то, чтобы применить альтернативные способы решения и посмотреть, какой способ легче. Речь идет о том, что ученики, использующие данные методы, начинают любить математику и заниматься ею по-настоящему.

Вопрос. *А как насчет понимания? Если использовать ваш метод для изучения таблицы умножения, он не объясняет ученику, почему 6 на 7 равно 42.*

Ответ. Верно, не объясняет. Но этого не делает и никакой другой метод изучения таблицы умножения. Зубрежка также не предполагает, чтобы ученик понимал, почему произведение 6 х 7 равно 42. Мой же подход состоит в том, чтобы научить ученика эффективному и простому методу получения ответа к задаче или примеру на вычисление.

И хотя механизм, посредством которого работает метод, не является очевидным, сам метод может быть вполне доходчиво объяснен к четвертому классу. (Объяснение того, почему работает формула, на которой основан метод, см. в приложении Г.) Любой ученик четвертого класса, полностью проработавший примеры, предлагаемые в книге, должен понять это объяснение.

Что означает произведение 6 х 7, надо объяснять ученикам до того, как требовать от них ответа. Работать по одним правилам недостаточно. Математику надо понимать. Ученики, которые учатся по методам, предлагаемым здесь, как правило, демонстрируют прекрасные результаты в понимании математических законов, а также в меньшей степени, чем другие

дети, оказываются скованными рамками общепринятых правил.

Вопрос. *Если в школе учат другим методам, не приведет ли это к неразберихе в голове моего ребенка?*

Ответ. Нет. Предлагаемые здесь методы дополняют то, что дети изучают в школе. Успешные ученики используют иные методы, чем те, кто успевает плохо. Иногда это может смутить учителя, но вряд ли способно причинить какой-либо вред ученику. Большинство данных методов работают на незримом уровне. Речь идет лишь о пользе, которую способно принести ученику их применение. Если ученик не расскажет о том, что он предпочитает использовать некие особые методы решения примеров, об этом никто никогда не догадается.

Вопрос. *Учителя моих детей требуют, чтобы ученики полностью отображали ход решения в своих тетрадях. Если вычисления выполнять в уме или как-то иначе, как им тогда быть?*

Ответ. Ученики обязаны делать то, что требует учитель. Если ученик сдает экзамен, то, естественно, он должен продемонстрировать учителю те знания и умения, которые тот от него ждет.

На обычном уроке, если учитель требует ребенка показать, как он вычислил произведение 13 х 14, ученику достаточно будет сказать: «Я знаю таблицу умножения до двадцати включительно. Мне не нужно вычислять такие произведения на бумаге». Если учитель попросит ученика подтвердить свои слова делом, то ученик покажет, что действительно способен вычислять в уме, и очень быстро, любое произведение чисел от 10 до 20. Ученик также может выполнить мгновенную проверку ответа путем выбрасывания девяток. Учителя это только впечатлит, но никак не раздосадует.

Вопрос. *Ваш метод не всегда предлагает самое простое решение. Зачем мне его использовать, если существует более простой альтернативный способ?*

Ответ. Разумеется, в таком случае вам следует использовать тот способ, который вы считаете более простым. Я предлагаю здесь некоторые весьма простые методы, но за вами остается полное право использовать те, которые, на ваш взгляд, еще проще.

Например, если бы вам надо было перемножить 8 и 16, вы могли бы нарисовать кружки и взять 10 в качестве опорного числа. Я бы так не делал, а, скорее всего, умножил бы 8 на 10, а затем прибавил бы произведение 8 х 6 (80 + 48 = 128). Или

сначала перемножил 8 и 8, что дало бы 64, а затем удвоил бы этот результат.

Я нахожу важной частью своих преподавательских подходов предоставление ученикам нескольких методов на выбор. Однажды ученица подошла ко мне и сказала: «Извините, мистер Хэндли, но я больше не пользуюсь вашими методами».

«Почему?» — спросил я.

«Я теперь знаю наизусть произведения чисел и просто вспоминаю нужный ответ».

Как, по-вашему, счел ли я это чем-то предосудительным? Вовсе нет. Ученица лишь сказала мне, что помнит теперь произведения чисел от 15 и выше.

Ученики, овладевшие данными методами, реже решают задачи строго в соответствии с правилами и склонны проявлять оригинальность.

Вопрос. *Зачем вы учите учеников вычислению всех этих примеров? Для чего нам калькуляторы?*

Ответ. Калькулятор не станет думать за вас. Ученики будут гораздо лучше разбираться в принципах вычислений, если возьмут на вооружение представленные здесь методы. Именно принципы, а не голые правила будут их основным средством в поиске решений математических задач.

Когда подобный вопрос мне задают в классе, я прошу учеников достать свои калькуляторы и вычислить с их помощью один пример.

Я предлагаю им вводить цифры и арифметические знаки в том порядке, в каком их называю:

2 + 3 x 4 =

У некоторых детей калькуляторы дают в ответе 20. У других — 14. Правильным ответом является 14.

Почему два разных ответа? Не все калькуляторы «знают», в каком порядке следует выполнять арифметические операции. Например, сначала надо перемножать, а потом складывать или вычитать. Рассматриваемый пример на самом деле следует читать так: «Два плюс трижды четыре».

3 на 4 равно 12, плюс 2 — получаем 14.

Калькулятор не будет за вас думать; он вам не поможет, если вы не знаете основ математики. Наилучшим образом понимать природу чисел и принципы, на которых основаны математические вычисления, помогают подходы и методы наподобие тех, что предлагаются в данной книге.

Вопрос. *Вы за или против калькуляторов?*

Ответ. Калькуляторы — полезные устройства. Они позволяют вам сэкономить много времени и сил. Я очень часто ими пользуюсь.

Ученики, бывает, спрашивают у меня: «Как бы вы перемножили шестнадцать миллионов триста сорок девять тысяч шестьсот восемьдесят девять на четыре миллиона восемьсот шестьдесят две тысячи сто девяносто четыре?» Я отвечаю им, что первым делом полез бы в карман за калькулятором. Ученики, кажется, порой ждут от меня другого ответа. Я часто пользуюсь калькулятором. Когда мне надо сложить колонку чисел, я прибегаю к помощи калькулятора. Часто я перепроверяю на калькуляторе полученный в уме ответ, поскольку знаю, что ошибки всегда возможны.

Я также делаю мысленную прикидку ответа, чтобы проверить, отвечает ли логике полученный на калькуляторе ответ. Последний должен быть того же порядка, что и моя мысленная оценка.

Когда инженерные калькуляторы только начали продавать, я купил самый недорогой. Я обнаружил, что не знаю всех имеющихся в нем функций, и поэтому потратил некоторое время на их детальное освоение. В результате калькулятор помог мне повысить мои знания в некоторых областях статистики, о которых я ранее и не слышал.

Я часто задумывался над тем, чего бы добились гениальные математики прошлого, если бы им в руки попался современный инженерный калькулятор. Уверен, что они нашли бы ему прекрасное применение и, наверное, добились бы гораздо большего.

Вопрос. *Вы сами придумали эти методы?*

Ответ. Да, многие из представленных в книге методов придуманы мною, например метод с кружками и опорным числом. Но умножению и делению с помощью множителей меня научили еще мои учителя начальных классов — мисс Кларк и миссис О'Коннор. Мисс Кларк научила меня методу вычитания и умножению по множителям, а миссис О'Коннор — методу деления в столбик по множителям. Затем на протяжении учебы в школе я освоил много новых методов и приемов вычисления.

В начальной школе я самостоятельно дошел до того, как можно легко и быстро находить сумму и разность дробей, но, поверите ли, я был слишком робким, чтобы озвучить свои идеи перед всем классом.

Вопрос. *Я додумался до некоторых из этих методов и*

подходов самостоятельно, успевая всегда лучше других своих одноклассников по математике. Это несправедливо, что вы учите детей тем же вещам, до которых я додумался сам. Поэтому я заслуживаю некоторого преимущества и признания.

Ответ. Это мне высказал один американский школьник. На мой взгляд, обучая детей математике, мы должны учить их наилучшим существующим методам и подходам и как можно лучше объяснять им все связанные с этим нюансы. Не следует оставлять их в качестве задач повышенной сложности для «самых способных» учеников ради самостоятельного осмысления. Почему не дать возможность каждому ребенку преуспевать в математике?

Вопрос. *Преподавание данных методов превратит неуспевающих учеников в хорошо успевающих. Многие из них потеряют друзей из-за того, что станут лучше учиться. Не приведут ли ваши методы к проблемам во взаимоотношениях детей?*

Ответ. Я до сих пор не уверен, был ли вопрос задан серьезно, хотя реакция окружающих как будто бы подтверждала это.

Хочу сказать, что я скорее готов решать проблемы, вызванные тем, что ребенок стал лучше успевать по математике и иным предметам, чем проблемы, связанные с недостатком интеллекта и плохими показателями в учебе.

Вопрос. *Я — молодой учитель, недавно закончивший институт. Не будет ли у меня проблем, если я начну преподавать данные методы? Что будет, если мои четвероклассники к концу учебного года начнут решать примеры как шестиклассники?*

Ответ. Если есть два метода чему-либо научить — легкий и сложный, — кто же станет следовать сложному методу? Если, изучая таблицу умножения для чисел 3 и 4, дети параллельно выучат таблицу умножения для 5, 6, 7, 8 и 9, разве это плохо? Вы учите детей тому, чему вам положено учить, но просто не тем способом, которому вас научили.

Методы, о которых идет речь, попадают в рамки требований системы образования, поскольку позволяют научить детей тому, что от них требуется по программе, и плюс еще немного сверх того. Мой учитель в девятом классе Гарри Форкаст учил нас математике уровня девятого класса с элементами курса математики одиннадцатого. Я обожал изучать математику под его руководством. Я не мог дождаться того момента, когда приду домой и сяду за самостоятельное решение задач. Он учил нас приемам более быстрого вычисления, что являлось частью его методики обучения. Я чувствовал себя как Шерлок Холмс,

разгадывающий очередную тайну, когда применял его методы для решения алгебраических задач.

Учителя пятых и шестых классов должны быть рады, что их ученики опережают усвоение материала, и использовать эту возможность, чтобы продвинуть их знания еще дальше. Уверен, что эти методы будут преподавать в школах повсеместно. И я очень надеюсь, что настоящая книга в этом поможет.

Вопрос. *Я тоже молодой учитель и всегда ужасно боялась математики. Что будет, если я стану учить детей вашим методам и вдруг в какой-то момент запутаюсь и не буду знать, как двигаться дальше? Что, если ученики зададут мне вопрос, а я не смогу на него ответить? Может быть, безопаснее использовать те же методы, что и другие учителя? Не возьму ли я на себя излишний риск, если буду учить детей согласно вашим методам?*

Ответ. Конечно, некоторый риск есть, но его можно свести к минимуму. Методы совсем несложные. Начинайте постепенно. Научите детей сначала тому, как вычислять произведения пар чисел до 10 х 10. Пусть как следует поупражняются несколько дней. Затем научите их решать примеры с числами от 90 до 100. По сути, речь идет о тех же произведениях, но в гораздо более интересных примерах. Решая их, они не только еще лучше запомнят таблицу умножения для однозначных чисел (когда будут перемножать числа в кружках), но и для чисел побольше, комбинации цифр, которые дают в сумме 10. Следующим шагом будет изучение простого способа вычисления примеров, когда одно число вычитают из числа больше 10, но меньше 20. 14 — 8 = 4 + 2 = 6 (см. главу 9).

Затем, когда будете обучать их методу перемножения чисел больше 10 и меньше 20, вам придется ввести понятие положительных и отрицательных чисел. Вам не нужно давать подробных разъяснений, просто скажите, что данное понятие более подробно будет объяснено позднее.

Обучая детей данным методам, вы обнаружите, как шлифуется ваша способность работать с числами. У вас укрепится уверенность в своих силах. Скажите своим ученикам, что вы изучаете эти методы вместе с ними, что сделает методику более интересной для учеников.

Приложение Б
Приближенное значение кубического корня

Нам нечасто приходится вычислять приближенное значение кубического корня, однако иногда возникает необходимость узнать размеры сферы или куба. Например, когда мы цементируем подъезд к гаражу, нам может потребоваться вычислить объем (то есть кубическую величину) цемента, песка или гравия. Для большинства людей существует единственный способ вычислить кубический корень — воспользоваться калькулятором. Даже в этом случае это должен быть инженерный калькулятор.

Кубический корень из 27 равен 3, поскольку 3 x 3 x 3 = 27. Чтобы возвести три в куб, необходимо перемножить число 3 три раза. 3 в кубе равно 27. Кубический корень из 27 равен 3. Это записывается так: $\sqrt[3]{27}$. Цифра 3 над знаком корня говорит о том, что это кубический корень. (По идее, над знаком квадратного корня следует ставить цифру 2, однако в этом случае общепринято опускать цифру над корнем.)

Я покажу простой способ вычисления приближенного значения кубического корня, точно так же как ранее показал способ оценки значения квадратного корня. Для использования простой формулы, которую я вам предложу, достаточно иметь простейший калькулятор, умеющий лишь складывать, вычитать, умножать и делить.

Во-первых, необходимо запомнить кубы чисел от 1 до 10:

$1^3 = 1$; $4^3 = 64$
$2^3 = 8$; $5^3 = 125$
$3^3 = 27$; $6^3 = 216$
$7^3 = 343$; $9^3 = 729$
$8^3 = 512$; $10^3 = 1000$

Кубы чисел от 1 до 5 не представляют проблем, поскольку их легко вычислить, если они забудутся.

Первым делом при нахождении квадратного корня из числа мы разбивали его на пары цифр, поэтому:

Чтобы найти *кубический* корень из числа, разбиваем его цифры на группы *по три*. Количество таких групп дает нам количество цифр ответа.

Затем мы оцениваем значение кубического корня из числа, составленного из первой тройки цифр. Здесь нам понадобятся

кубы первых десяти чисел, которые мы уже запомнили.

• Если число, составленное из первой тройки цифр, находится между 1 и 7, то первой цифрой ответа будет 1.

• Если оно находится между 8 и 26, то первой цифрой ответа будет 2.

• Если оно находится между 27 и 63, то первой цифрой ответа будет 3.

Думаю, вы уловили закономерность. Оценка значения кубического корня из числа, составленного из первой тройки цифр, дает первую цифру ответа. Остальные цифры (по количеству остающихся троек) примем равными 0. Это будет первое приближение искомого кубического корня.

Возьмем в качестве примера число 250:

$\sqrt[3]{\mathbf{250}}$ =

250 больше, чем 6 в кубе (216), но меньше 7 в кубе (343). Это говорит нам о том, что значение корня находится между 6 и 7.

Делим исходное число на первое приближение корня (6), при этом дважды:

250: **6** = **41,67**

Делим полученный ответ снова на 6:

41,67: **6** = **6,94**

Разница между первым приближением (6) и результатом двойного деления (6,94) составляет 0,94. Разделим это число на 3 и прибавим полученный результат к нашему первому приближению:

0,94: **3** = **0,31**

Прибавляя к 6, получаем 6,31.

$\sqrt[3]{\mathbf{250}}$ = **6,31**

Данное приближение всегда будет немного больше фактического корня, поэтому округлим его в меньшую сторону до 6,3. Калькулятор дает значение корня 6,2996. Мы округлили недостаточно, однако полученный нами ответ верен до одной цифры после запятой. И настоящее преимущество состоит в том, что вышеприведенный расчет можно произвести в уме.

Последний шаг в наших вычислениях иными словами можно описать как вычисление среднего значения для трех использованных нами чисел. А именно: мы находим сумму 6 + 6 + 6,94 и делим на 3.

6 + **6** + **6,94** = **18,94**

18,94: **3** = **6,31**

Я считаю, что гораздо проще делить разницу на 3.

Воспользовавшись простым десятиразрядным калькулятором с четырьмя функциями, я взял 6,31 в качестве второго приближения и повторил вычисления. В качестве окончательного

ответа я получил 6,2996053, тогда как мой инженерный калькулятор выдал в ответе 6,299605249 — таким образом, метод обеспечил точность до семи цифр после запятой.

Попробуйте вычислить следующие кубические корни самостоятельно:

а) $\sqrt[3]{230}$ = _; б) $\sqrt[3]{540}$ = _; в) $\sqrt[3]{8162}$ = _; г) $\sqrt[3]{30000}$ = _

Ответы:

а) 6,127; б) 8,1457; в) 20,134; г) 31,07

Используя вышеизложенный метод, полученные вами ответы должны быть весьма близкими к фактическим значениям. Если хотите, можете оценить точность приближения в процентах.

Существует другой способ для решения примеров в) и г). Первыми приближениями являются 20 и 30 соответственно. Таким образом, деление можно выполнять только один раз: на 20^2 и 30^2. Это означает деление на 400 и 900. Речь идет о том, чтобы переместить запятую на две цифры влево и делить на 4 и 9.

Аналогично нашему методу вычисления приближенного значения квадратного корня, если исходное число ненамного меньше куба некоего числа, мы можем брать в качестве первого приближения число, куб которого больше, а не нижнее приближение. После этого делим дважды на первое приближение и вычитаем треть разницы между полученным результатом и первым приближением. И опять-таки, как и в случае с квадратным корнем, существует способ сократить вычисления.

Рассмотрим, к примеру, кубический корень из 320.

$\sqrt[3]{\mathbf{320}}$ =

6 в кубе равно 216, а 7 в кубе будет 343. 7, безусловно, является более близким приближением.

320: 7 = 45,71

Снова делим на 7:

45,7: 7 = 6,53

Вычитаем 6,53 из 7:

7 – 6,53 = 0,47

Теперь необходимо вычислить треть разницы:

0,47: 3 = 0,157

Вычитаем треть разницы (0,157) из нашего приближения (7):

7 – 0,157 = 6,843

Округлим до 6,84 — это искомый ответ.

$\sqrt[3]{\mathbf{320}}$ **= 6,84**

Истинным ответом является 6,8399.

Теперь по поводу более короткого способа вычислений. На самом деле мы просто нашли среднее значение для чисел 7, 7 и 6,53. Иными словами, речь идет о делении суммы этих чисел на 3:

7 + 7 + 6,53 = 20,53

20,53: 3 = 6,843

Деля 20 на 3, мы получаем 6 с остатком 2, который переносим к 0,53, получая 2,53.

2,53: 3 = 0,843

Тогда как в случае квадратного корня мы переносим 1, в случае кубического корня мы переносим 2. Вместо того чтобы вычитать треть разницы, вычисленной от верхнего приближения, мы берем нижнее приближение (в данном случае 6), переносим 2 и делим на 3, получая окончательный ответ.

Почему мы переносим 2, вычисляя кубические корни? Потому что, как и в рассмотренном только что случае, когда вычисляем среднее из трех чисел, мы складываем два числа, которые на единицу больше искомого. Поэтому суммой будет нижнее приближение, взятое трижды, плюс 2.

Попробую проиллюстрировать на примере:

$\sqrt[3]{700}$ =

В качестве первого приближения берем 9, которое является приближением сверху (9 в кубе равно 729).

Делим 700 на 9 дважды:

700: 9 = 77,77 (округлили в меньшую сторону)

77,77: 9 = 8,64

Первой цифрой ответа является 8. Чтобы получить остаток, заменим целую часть на 2, оставив дробную часть как есть, и разделим полученное число на 3.

2,64: 3 = 0,88

Искомым ответом является 8,88. Он точен до двух знаков после запятой.

Попробуем решить еще один пример:

$\sqrt[3]{7531}$ =

Разбиваем число под знаком корня на тройки цифр.

Получаем:

$$\sqrt[3]{7\ 531} =$$
$$\star \quad \star$$

Найдем приближенное значение кубического корня из числа, составленного из цифр первой тройки, то есть 7. 7 близко к 8, равному 2^3, поэтому возьмем 2 в качестве нашего первого приближения. У нас две тройки цифр, поэтому в ответе будет две цифры. Берем, как водится, 0 в качестве второй цифры, получая полное первое приближение 20.

Делим 7531 на 20 дважды. Чтобы разделить на 20, сначала делим на 10, а затем на 2.

7531: 20 = 376,55

376,55: 20 = 18,8275

Вместо деления на 20 дважды мы могли бы разделить на 20 в квадрате, то есть на 400.

7531: 100 = 75,31

75,31: 4 = 18,8275

Теперь мы знаем, что первой цифрой ответа является 1. Речь идет о цифре десятков. Нашим промежуточным результатом является 10.

Ставим 2 перед остатком числа и получаем 28,8275.

28,8275: 3 = 9,609

10 + 9,609 = 19,609

Округляя, получаем 19,6. Наш ответ верен до одной цифры после запятой. Фактический ответ равен 19,60127, значит, мы получили очень близкий результат.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно, а затем сравните свое решение с тем, что дано ниже:

а) $\sqrt[3]{115}$ = _; б) $\sqrt[3]{500}$ = _

В примере а) берем 5 в качестве приближения.

Делим 115 на 5 и получаем 23. (Делим на 10 и удваиваем ответ.) Затем делим 23 на 5, получая 4,6. (Делим на 10 и удваиваем.) 4 — это первая цифра нашего ответа.

Подставляем 2 вместо 4, получая 2,6. Теперь делим на 3.

2,6: 3 = 0,8667

Округляем до 4,86. Ответ точен до двух знаков после запятой.

Для примера б) возьмем 8 в качестве первого приближения.

500: 8 = 62,5 62,5: 8 = 7,8125

Согласно правилу приближения по верхнему числу, подставляем 2 вместо 7, получая 2,8125.

Поделив 2,8125 на 3, имеем 0,9375. Прибавляем данный результат к 7 и получаем наш ответ: 7,9375.

Истинный ответ, вычисленный с помощью калькулятора, равен 7,93700526. Для вычисленного в уме полученный нами ответ является чрезвычайно точным. Как, впрочем, и для ответа, вычисленного на бумаге, но в результате простейших вычислений. Можно также отметить, что полученные нами приближения всегда превышают фактический ответ. Если бы в только что рассмотренном примере мы округлили в сторону уменьшения, то вышли бы на точный ответ.

Это эффективный метод для нахождения кубического корня из числа, производящий большое впечатление на окружающих. Обычному человеку и в голову не придет пытаться вычислить ответ даже с помощью ручки и бумаги. Рассмотренный же здесь метод допускает вычисление в уме.

Приложение B
Проверка делимости на число

Не составляет труда проверить, является ли одно число нацело делимым на другое без выполнения собственно деления.

Существуют следующие правила делимости:

1. Все числа делятся на 1.

2. Все четные числа делятся на 2. (Если последняя цифра числа делится на 2 или равна 0, число делится на 2.)

3. Если число нацело делится на 3, сумма его цифр также делится на 3. Обратное утверждение также верно. Например, 12 делится на 3, поскольку 1 + 2 = 3.

4. Если число, составленное из последних двух цифр числа, делится на 4, то все число делится на 4. Например, 116 делится на 4, так как 16 = 4 x 4.

5. Если число оканчивается на 0 или 5, то оно делится на 5.

6. Если число является четным и сумма его цифр делится на 3, то оно делится на 6.

7. * (См. замечание в конце списка.)

8. Если число, составленное из трех последних цифр проверяемого числа, делится на 8, то само проверяемое число делится на 8. Например, 1128 делится на 8, поскольку 128 = 8 x 16.

9. Если сумма цифр числа равна или кратна 9, то число делится на 9.

10. Если число оканчивается на 0, то оно делится на 10.

11. Если разность между суммой цифр числа на четных местах и суммой цифр на нечетных местах равна 0 или является кратной 11, то число нацело делится на 11.

12. Если сумма цифр числа делится на 3 и число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4, то число делится на 12.

13. *

17. *

19. *

20. Если цифра десятков числа является четной и число оканчивается на 0, то оно делится на 20.

21. Если число делится на 7 и сумма его цифр является кратной 3, то число делится на 21.

23. *

29. *

** Существует простой метод проверки делимости, который*

может быть использован как для этих чисел, так и для других, больших по величине. При этом используются вспомогательные множители. Традиционные методы слишком сложны и требуют ручки и бумаги. Проверки же, о которых здесь идет речь, могут быть выполнены в уме.

Использование вспомогательных множителей

Чтобы проверить делимость на 7, будем использовать число 5 в качестве вспомогательного множителя. Умножим цифру единиц проверяемого числа на вспомогательный множитель.

Прибавляем полученный результат к проверяемому числу с удаленной цифрой единиц (то есть все разряды числа смещаются вправо на один, так что десятки становятся единицами, сотни — десятками и т. д.). Если сумма делится нацело на 7, то исходное число тоже делится на 7.

Например, делится ли 91 нацело на 7?

Нашим вспомогательным множителем является 5 (почему это так, объясню чуть позже). Умножаем цифру единиц числа 91 (1) на 5, получая в ответе 5. Прибавляем 5 к 9 и получаем 14, которое равно удвоенному 7. Таким образом, 91 делится на 7.

Делится ли 133 на 7?

Умножаем цифру единиц числа 133 (3) на наш вспомогательный множитель (5) и получаем 15. Прибавим его к 13 и получим 28 (7 x 4). Итак, мы выяснили, что 133 делится на 7. Возьмем еще один пример: делится ли 152 на 7? Умножим 2 на 5, получая 10. Складывая 10 и 15, получаем 25. 25 не является кратным 7, поэтому и 152 не делится на 7 нацело.

Последний пример: делится ли 1638 на 7 без остатка?

5 x **8** = **40**

163 + **40** = **203**

Поскольку мы не можем сходу определить, делится ли 203 на 7, повторим процедуру:

5 x **3** = **15**

20 + **15** = **35**

35 делится на 7 (5 x 7 = 35). Таким образом, 1638 нацело делится на 7.

Каким образом мы определяем вспомогательные множители?

Метод для определения вспомогательных множителей состоит в следующем:

Для определения положительного вспомогательного множителя увеличиваем проверяемый делитель на столько раз, чтобы полученный ответ оканчивался на 9. В качестве вспомогательного берем цифру десятков числа, которое на 1 больше полученного результата.

Например, если мы хотим проверить делимость на 7, умножаем 7 на 7 и получаем 49. 49 на 1 меньше 50. Значит, вспомогательным множителем для 7 является 5.

Чтобы проверить делимость на 13, умножаем его на столько раз, чтобы в разряде единиц ответа оказалась цифра 9:

13 x 3 = 39

39 на 1 меньше 40. Следовательно, для 13 используем в качестве вспомогательного число 4. В случае с 19 нам не нужно умножать его ни на что, поскольку оно уже оканчивается на 9. 19 на 1 меньше 20, поэтому используем 2 в качестве вспомогательного множителя.

Чтобы найти вспомогательный множитель для 23, замечаем, что цифрой единиц является 3. Поскольку 3 x 3 = 9, умножим 23 на 3, получая 69. Это на 1 меньше, чем 70, поэтому берем 7 в качестве вспомогательного множителя.

Почему метод работает?

Если мы хотим проверить, делится ли одно число на другое, прибавление последнего или кратного последнему к первому не повлияет на делимость.

Когда мы проверяем, делится ли 91 без остатка на 7, то на самом деле прибавляем 49 (7 x 7) к 91, получая в ответе 140. Если мы уберем нуль в конце, это никак не изменит результат.

Проверяя, делится ли 112 на 7, мы умножаем 2 на 5 и получаем 10.

После этого 11 + 10 = 21, что, в свою очередь, равно 7 x 3.

Прибавить 100 к 110 — это то же самое, что прибавить 98 (2 x 49 или 7 x 7 x 2) к 112.

98 + 112 = 210

210 = 3 x 7 x 10

Внимательно рассмотрим вспомогательный множитель для 13. Прежде всего определим, какое число является

вспомогательным множителем для 13?

3 x 13 = 39

39 на 1 меньше, чем 40, поэтому берем 4 (цифру десятков числа 40) в качестве вспомогательного множителя. Чтобы проверить, делится ли число на 13, умножим цифру единиц на 4 и прибавим к полученной сумме цифру десятков.

Например, делится ли 78 без остатка на 13?

Цифрой единиц является 8:

8 x 4 = 32

32 + 7 (цифра десятков числа 78) **= 39 (3 x 13)**

Поскольку 39 равно 3 x 13, получаем, что 78 кратно 13. Если мы сомневаемся насчет 39, можно продолжить процесс:

9 x 4 = 36

36 + 3 = 39

Поскольку мы получили то же число, можно с уверенностью сказать, что исходное число без остатка делится на 13. Рассмотрим другой пример. Является ли 351 кратным 13? Цифрой единиц является 1:

1 x 4 = 4

4 + 35 = 39 (39 = 3 x 13)

Итак, мы доказали, что 351 кратно 13.

А как насчет 3289? Делится ли оно без остатка на 13? Проверяемое число оканчивается на 9:

9 x 4 = 36

328 + 36 = 364

Мы не знаем, делится ли 364 на 13, поэтому на этот раз подвергаем проверке число 364.

Его последней цифрой является 4.

4 x 4 = 16

36 + 16 = 52 (52 = 13 x 4)

Если бы мы не знали, что 52 равно 13 x 4, то могли бы продолжить проверку далее.

Цифрой единиц числа 52 является 2.

2 x 4 = 8

5 + 8 = 13

Теперь мы знаем наверняка, что 3289 без остатка делится на 13.

А как насчет делимости на другие числа из нашего списка в начале главы?

Чтобы проверить делимость на 17, в качестве вспомогательного множителя берем 12; для 19 — 2; для 3–7; для 29 — 3. Данные множители могут быть найдены с помощью метода для определения вспомогательных множителей.

Например, является ли 578 кратным 17?

Большинству из нас деление на 17 покажется довольно непростой задачей. И мы, скорее всего, воспользуемся калькулятором.

Нам известно, что 12 является вспомогательным множителем при проверке делимости на 17. Умножаем 8 (цифру единиц числа 578) на 12.

12 x **8** = **96**

96 + **57** = **153**

То, что 153 без остатка делится на 17, не является очевидным. Попробуем снова.

3 x **12** = **36**

36 + **15** = **51**

Если вы не уверены насчет 51, продолжим процесс:

1 x **12** = **12**

12 + **5** = **17**

Очевидно, что 17 делится без остатка на 17. Поэтому 578 кратно 17.

Замечание: чуть позже я покажу альтернативный метод, с помощью которого можно проверить делимость на 17.

Рассмотрим какой-нибудь пример в обратную сторону. Произведение 7 x 13 равно 91, поэтому 91 является кратным для обоих чисел.

Проверка для 7:

1 x **5** = **5**

5 + **9** = **14**

14 равно 2 x 7, поэтому 91 без остатка делится на 7. Проверка для 13:

1 x **4** = **4**

4 + **9** = **13**

Таким образом, 91 делится на 13.

Попробуйте определить делимость самостоятельно:

а) Является ли 266 кратным 19?

б) Является ли 259 кратным 7?

в) Является ли 377 кратным 13?

г) Является ли 377 кратным 29?

Ответ утвердительный в каждом случае.

Отрицательные вспомогательные множители

Проверять делимость на число можно также с помощью отрицательного вспомогательного множителя.

Чтобы определить отрицательный вспомогательный множитель, увеличиваем проверяемый делитель на столько раз, чтобы полученный ответ оканчивался на 1 (цифра единиц). Количество десятков полученного числа берем в качестве вспомогательного множителя.

Отрицательным вспомогательным множителем для 17 будет 5, поскольку 3 х 17 = 51. Попробуем еще раз решить некоторые вышеприведенные примеры, решенные с помощью положительного вспомогательного множителя.

Является ли 578 кратным 17?

Нашим отрицательным вспомогательным множителем является 5 (—5).

-5 х **8** = **-40**

Вычитаем результат произведения из числа, полученного после отбрасывания цифры единиц:

57 – 40 = 17

Мы доказали, что 578 делится на 17 без остатка за один шаг.

Попробуем решить другой пример. Делится ли 918 на 27 нацело?

Во-первых, необходимо определить отрицательный вспомогательный множитель для 27. Произведение 3 х 27 равно 81. Нашим искомым множителем является —8.

Умножаем цифру единиц числа 918 на множитель —8:

-8 х **8** = **-64**

91 – 64 = 27

Получили, что 918 делится на 27.

Еще один пример. Является ли 135 кратным 27?

Вспомогательным множителем является —8.

5 х **-8** = **-40**

13 – 40 = -27

В ответе получили —27, доказав, что 135 делится на 27 без остатка. (Чтобы получить —27, все, что нам надо было сделать, — это вычесть 13 из 40 и поставить знак «минус» перед результатом.)

Попробуйте определить делимость самостоятельно:

а) Является ли 136 кратным 17?

б) Является ли 595 кратным 17?

в) Является ли 1426 кратным 31?

г) Является ли 756 кратным 27?

Во всех данных примерах ответ утвердительный. Проверка не представляет никаких трудностей.

Какой вспомогательный множитель выбрать —

положительный или отрицательный?

Если числа оканчиваются на 7 или 1, то лучше использовать отрицательные вспомогательные множители. Посмотрим, какие цифры единиц могут быть у делителей, подвергающихся проверке.

Если делитель оканчивается на 1, в этом случае мы используем отрицательный вспомогательный множитель. Это число, составленное из цифр, стоящих перед 1, и со знаком «минус». Например, для числа 31 вспомогательным множителем будет —3.

Если делитель оканчивается на четную цифру, то сначала его следует разделить пополам, а затем использовать самый подходящий из методов для определения вспомогательного множителя.

Если делитель оканчивается на 3, то после умножения на 3 мы получаем число, оканчивающееся на 9, и легко определяем положительный вспомогательный множитель.

Если делитель оканчивается на 5, то сначала его следует разделить на 5, а затем использовать самый подходящий из двух методов.

Если делитель оканчивается на 7, то после умножения на 3 мы получаем число, оканчивающееся на 1, и легко определяем отрицательный вспомогательный множитель.

Наконец, если делитель оканчивается на 9, то после прибавления к нему 1 мы берем число, стоящее перед последним нулем в полученной сумме, в качестве положительного множителя.

Приложение Г
В чем секрет метода

Умножение при помощи кружков

В чем секрет данного метода?

Во-первых, позвольте мне объяснить это «по-простому».

Найдем произведение 99 х 85.

Стандартный способ заключается в следующем.

99 — это почти 100, поэтому умножим на 100 и вычтем 85.

85 х **100** = **8500**

Теперь мы должны вычесть 85. Каким простым способом это можно сделать? Вычесть 100 и прибавить 15.

8500 — 100 =

8400 8400 + **15** = **8415**

Не похоже ли это на наш метод с кружками?

Решая тот же пример (99 х 85) с кружками, мы вычитаем 1 из 85, получая 84, и умножаем на 100, что дает 8400. Затем, поскольку мы вычли *одну* сотню, мы *один раз* прибавляем к результату 15.

Вычисляя произведения 98 х 85, мы могли бы умножить на 100, а затем дважды вычесть 85.

85 х **100** = **8500**

Вычтем дважды по 85 из полученного результата. Как легче всего это сделать?

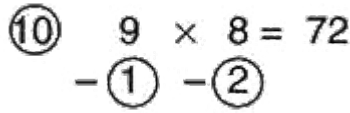
Вместо того чтобы находить сумму 85 + 85 и вычитать ее из 8500, отнимем дважды по 100 и прибавим также дважды по 15. Вычитание 200 из 8500 дает нам 8300.

Чтобы не прибавлять сначала 15, а затем опять 15, просто вспомним, что 2 на 15 равно 30, и прибавим сразу 30. В ответе получаем 8330.

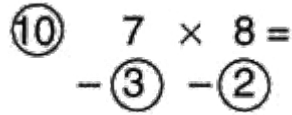
Можно распространить данное рассуждение на произведение чисел меньше 10.

9 х **8** =

Произведение 10 х 8 дает 80, после чего вычитаем 8 и получаем 72. С помощью кружков решение выглядит следующим образом:



Вычислим еще одно произведение:



Если умножить 10 на 7 и затем вычесть произведение 2 x 7 из полученного результата, то можно увидеть связь между обоими методами. Произведение 10 x 7 равно 70. Легкий способ вычесть дважды по 7 состоит в том, чтобы отнять дважды по 10, а затем прибавить дважды по 3.

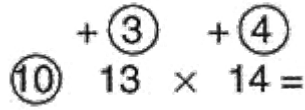
Это то, что я назвал «простым» способом объяснить, почему метод перемножения с помощью кружков работает. Даже ученики начальной школы поймут приведенные рассуждения — особенно как следует потренировавшись в решении примеров, предложенных в настоящей книге.

Алгебраическое объяснение

Теперь приведу алгебраическое объяснение.

13 x **14** =

Рассмотрим пример:



Обозначим буквой *a* опорное число, в данном случае 10, а буквами *b* и *c* цифры единиц, или числа в кружках, в данном случае 3 и 4.

Произведение теперь может быть записано следующим образом:

(**a** + **b**) x (**a** + **c**)

Перемножая (a + b) x (a + c), получаем:

$\mathbf{a^2 + ab + ac + bc}$

Первые три члена делятся на *a*, поэтому можем вынести *a* за скобки.

a (**a** + **b** + **c**) + **bc**

Подставляя соответствующие числовые значения, получаем:

(**10** + **3**) x (**10** + **4**) =

10 (**10** + **3** + **4**) + (**3** x **4**) =

10 x **17** + **12** =

170 + **12** = **182**

В вышеприведенной формуле *b* и *c* могут представлять собой либо положительные, либо отрицательные числа, в зависимости от того, где (вверху или внизу) нарисованы кружки. В произведении 7 x 8 *b* и *c* были бы отрицательными числами.

Формулу удобно применять для возведения в квадрат чисел, близких по значению к 50 и оканчивающихся на 5.

Два опорных числа

Можно записать формулу следующим образом:

(**a** + **b**) x (**xa** + **c**)

Здесь *a* — опорное число, *b* и *c* — числа в кружках, а *x* — множитель.

Раскрывая скобки, получаем:

xa² + **xab** + **ac** + **bc**

Первые три члена делятся на *a*, поэтому формулу можно упростить следующим образом:

a (**xa** + **xb** + **c**) + **bc**

Рассмотрим формулу на конкретном примере:

13 x **41** =

Нашим основным опорным числом является 10, а вторым — 40, то есть 4 x 10. Числа в кружках — 1 и 3. Пример можно записать следующим образом:

$$(10 \times 4)\ \overset{③}{13} \times \overset{①}{41} =$$

Имеем:

a = **10** (основное опорное число)

b = **3** (число в кружке над 13)

c = **1** (число в кружке над 41)

x = **4** (множитель)

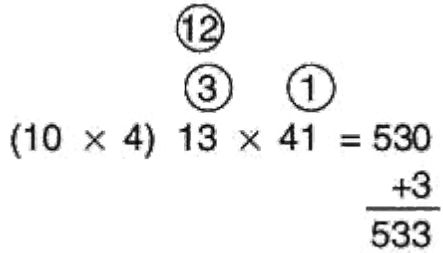
Подставив числа в формулу, получаем:

a (xa + xb + c) + bc

10 (4 x 10 + 4 x 3 + 1) + (3 x 1) = 10 (40 + 12 + 1) + (3 x 1) =

= 10 x 53 + 3 = 530 + 3 = 533 ОТВЕТ

Полностью решение выглядит так:



Формулы для возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 1 и 9

1. Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 1

Чтобы возвести в квадрат 31, сначала возводим в квадрат 30, получая 900.

Затем удваиваем 30, что дает нам 60, и прибавляем это число к предыдущему результату.

900 + 60 = 960

Теперь прибавляем 1.

960 + 1 = 961

Это простое вычисление сродни умножению в столбик или прямому умножению.

Для нахождения произведения 31 x 31 можно также использовать следующую алгебраическую формулу:

$(a + 1)^2 = (a + 1) \times (a + 1)$

$(a + 1) \times (a + 1) = a^2 + 2a + 1^2$

В нашем случае (31^2) a = 30.

Возводим 30 в квадрат, получая 900. Затем удваиваем a, как того требует формула, и получаем 60. Нам не нужно возводить в квадрат 1, поскольку единица, сколько ее ни умножай на саму себя, остается единицей.

Польза от данной формулы в том, что она превращает процесс умножения в простую последовательность и позволяет производить вычисления в уме.

2. Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 9

При возведении в квадрат чисел, оканчивающихся на 9, мы используем ту же формулу, что и для чисел, оканчивающихся на 1, однако вместо 1 берем —1.

Пример:

29_2 =

Чтобы вычислить 29^2, округлим 29 до 30. Квадрат 30 равен 900. Теперь удваиваем 30, получая 60, и вычитаем это число из предыдущего результата.

900 — 60 = 840

Теперь прибавим 1.

840 + 1 = 841

Стандартная формула выглядит так: (a + 1) x (a + 1). В данном же случае единица берется со знаком «минус», поэтому записываем:

(a — 1) x **(a — 1)**

Раскрывая скобки, получаем:

a^2 — 2a + 1

Это то же самое, что мы проделывали, вычисляя 29^2.

Вспомним, что a = 30. Возводим 30 в квадрат и получаем 900. На этот раз мы вычитаем 2a (60) из 900, получая 840. —1 в квадрате, то есть (—1), равно 1, которое мы также прибавляем и получаем в результате окончательный ответ: 841.

Данный подход проще, чем стандартное умножение в столбик.

Сумма и разность дробей

Концепция, о которой я поведу речь, основана на наблюдении, сделанном мною еще в начальной школе. Чтобы складывать дроби и вычислять их разность, не нужно находить наименьший общий знаменатель.

Если перемножить знаменатели дробей, мы получим общий знаменатель. Затем, если захотите, вы можете сократить дробь, чтобы получить меньший общий знаменатель или даже наименьший. Если не сокращать дробь, вычисления могут быть немного сложнее, однако ответ вы все равно получите правильный.

Возьмем простой пример:

1/2 + 1/4 =

Перемножим знаменатели и получим знаменатель искомой

дроби (8). Теперь сложим знаменатели и получим числитель искомой дроби (6).

Ответ: 6/8.

Мы видим, что данная дробь может быть сокращена до 3/4, поскольку и числитель, и знаменатель делятся на 2.

В данном случае наименьший общий знаменатель равен 4. Оба метода годятся для получения ответа.

Я знакомлю детей с понятием наименьшего общего знаменателя только после того, как удостоверюсь, что они достаточно уверенно складывают и вычитают дроби по моему методу.

Приложение Д
Выбрасывание девяток: секрет метода

Чем объяснить способ выбрасывания девяток? Почему цифры числа дают в сумме остаток от деления на 9?

А секрет вот в чем.

9 равно 10 минус 1. Для каждой десятки, содержащейся в числе, вы получаете одну девятку и остаток 1. Если число содержит два десятка (20), получаем две девятки и остаток

2. 30 дает три девятки и остаток 3.

Рассмотрим число 32: оно состоит из 30, то есть трех десятков, и 2, то есть двух единиц. Находя остаток от деления на 9, в случае 30 получаем три девятки и остаток 3. Две единицы в числе 32 сами являются остатком от деления на 9, поскольку 2 на 9 разделить нельзя. Переносим остаток 3 от 30 и прибавляем его к остатку 2.

3 + 2 = 5

Таким образом, 5 является остатком от деления 32 на 9.

Для каждой сотни в числе мы получаем десять девяток и остаток 10. Он также делится на 9 и дает остаток 1. В результате для каждой сотни имеем остаток 1. Если взять число 300, остатком от деления его на 9 будет 3.

Иначе посмотреть на данное свойство можно таким образом:

1 x 9 = 9 (10 — 1)

11 x 9 = 99 (100 — 1)

111 x 9 = 999 (1000 — 1)

1111 x 9 = 9999 (10000 — 1)

Иными словами, каждая единица в любом разряде числа соответствует одной единице остатка.

Например, в числе 32145 цифра 3 обозначает десятки тысяч — для каждого десятка тысяч будет иметься остаток, равный 1. В данном случае суммарный остаток будет 3. Цифра 2 обозначает тысячи. Для каждой тысячи остаток будет равен 1. То же самое можно сказать и о сотнях, и о десятках. Цифра единиц сама является остатком, если только она не равна 9. В последнем случае мы просто выбрасываем цифру 9.

Таким замечательным свойством обладает число 9. Его можно с успехом применять для проверки ответов и делимости на 9. Помимо того что оно помогает в делении на 9, данное свойство позволяет лучше понять суть деления как операции над числами.

Приложение E
Возведение в квадрат футов и дюймов

В начальной школе нам приходилось вычислять площадь прямоугольных фигур со стороной, выраженной в футах или дюймах. Метод, которому нас учили, состоял в том, чтобы приводить все к одному измерению — в данном случае к дюймам — и затем умножать.

Например, если нам необходимо найти площадь садового участка со сторонами 3 фута 5 дюймов и 7 футов 1 дюйм, мы переводим длину сторон в дюймы, перемножаем их, а затем делим результат на 144, чтобы получить в целой части квадратные футы, а в остатке — квадратные дюймы.

Однако есть гораздо более простой способ.

Мы проходили его на уроках алгебры, но нам не объясняли, как его можно применить на практике.

Давайте умножим 3 фута 5 дюймов на 7 футов 1 дюйм, используя метод прямого умножения.

Прежде всего обозначим футы буквой f Запишем произведение 3 футов 5 дюймов и 7 футов 1 дюйма следующим образом:

(**3f + 5**) x (**7f +1**)

Запишем произведение так:

$$\begin{array}{r} 3f + 5 \\ \times\ 7f + 1 \\ \hline \end{array}$$

Теперь используем метод прямого умножения, с которым познакомились в главе 22.

Сначала умножаем 3f на 7f и получаем $21f^2$ (21 квадратный фут).

Теперь перемножаем накрест:

3f x **1 = 3f,** плюс **7f** x**5 = 35f** (35 футов на дюйм)

3f + 35f = 38f

Пока наш ответ равен $21f^2 + 38f$.

Теперь перемножим дюймы.

5 x **1 = 5** (5 квадратных дюймов)

Наш ответ: $21f^2 + 38f + 5$.

Иными словами, наш результат — 21 квадратный фут плюс

38 футов на дюйм и плюс 5 квадратных дюймов. (38 футов на дюйм означает 38 прямоугольников с длиной одной стороны 1 фут, а другой — 1 дюйм. 12 таких прямоугольников, расположенных сторона к стороне, дают площадь в 1 квадратный фут.) Разделим 38f на 12 и получим еще 3 квадратных фута, которые в сумме с 21 квадратным футом дадут 24 квадратных фута.

Умножим остающиеся 2 фута на дюйм на 12, переводя их в квадратные дюймы:

2 x **12** = **24**

5 + **24** = **29 квадратных дюймов**

Наш окончательный ответ: 24 квадратных фута и 29 квадратных дюймов.

Это гораздо более простой способ решения задач такого рода. Он может быть использован для перемножения любых величин, измеряемых не в метрических единицах.

Попробуйте решить следующие примеры самостоятельно:

а) 2 фута 7 дюймов x 5 футов 2 дюйма =

б) 3 фута 5 дюймов x 7 футов 1 дюйм =

Ответы:

а) 13 квадратных футов 50 квадратных дюймов

б) 24 квадратных фута 29 квадратных дюймов

Как успехи? Попробуйте решить снова, на этот раз без ручки и бумаги. Посмотрите, вы считаете, как гений! Ради этого стоило потрудиться.

Приложение Ж
Как добиться того, чтобы ученики любили математику?

Меня часто спрашивают, как мне удается привить своим ученикам любовь к математике? А почему, собственно, они не любят ее?

Являются ли математические игры возможным ответом на вопрос? Надо ли как можно больше привлекать учеников к участию в конкурсах и олимпиадах? Разумеется, я знаю преподавателей, стимулирующих работу в классе путем организации игр и конкурсов, в которых участвует каждый ученик. Однако если ребенок с трудом справляется с вычислениями, подобные мероприятия могут служить тормозом для математического развития ребенка.

Прежде всего я считаю, что основная причина, по которой люди в основном утверждают, что «не любят математику», состоит не в том, что они не любят математику как таковую, а в том, что не любят терпеть неудачи. Они считают математику чем-то очень сложным, так сказать, «не для средних умов». Каким видом спорта вам нравится заниматься? Обычно таким, которым вы можете заниматься не хуже других.

Люди в своем большинстве склонны приравнивать математические способности к интеллекту. Если вам хорошо дается математика, значит, вы умны. Если же вы слабы в математике, то, следовательно, вас трудно назвать толковым. Дети в школе не только смотрят таким образом на других ребят, но и применяют этот критерий к себе. Никому не нравится чувствовать себя недостаточно умным, особенно стоя перед всем классом у доски.

Наиболее верный способ сделать так, чтобы ученикам нравилась математика, — это дать им возможность добиваться успеха. В этом цель моих методов: дать возможность тем, кому еще вчера с трудом давались математические задачи, сегодня начать решать их с большим успехом. Одно дело сказать ученику: «У тебя все получится», и совсем другое — заставить его поверить в это.

Мы все хотим добиваться успеха. Проводя урок, я часто говорю детям о том, какие задачи они будут в состоянии решать через 10 минут. Затем я учу их, как это делать, и, к своему удивлению, они обнаруживают, что действительно решают новые

для себя задачи через какие-то считанные минуты. Вдруг ни с того ни с сего они начинают решать математические задачи как настоящие гении. Обычно детей настолько захватывают их собственные успехи, что они просят задавать им все новые и новые примеры. Потом они приходят домой и с воодушевлением рассказывают родителям, чего добились в школе и на что теперь способны. Дети стремятся как можно скорее показать свои новые умения. Они также спешат научить своих друзей новым способам вычислений.

Устраняйте риск

Я всегда говорю новому классу учеников, что меня не интересует, каковы их теперешние успехи в математике, поскольку в скором времени каждый из них будет решать задачи как гений, после того как я покажу им весь процесс от начала до конца.

Когда я разбираю с ними первые примеры, например показываю, как вычислить произведение 7 x 8, то говорю им, что они могут считать, прибегая к помощи пальцев рук, если им нравится. Если хотите, говорю я им, можете снять туфли и носки и считать на пальцах ног — я не обижусь. Все равно, говорю я далее, основами вычислений вы овладеете уже через несколько дней и считать на пальцах придется совсем недолго.

Я предлагаю детям для решения массу легких задач, но при этом стремлюсь к тому, чтобы они достигли «новых высот», которыми смогут гордиться, как, например, в случае с произведением 96 x 97. Даже если ученики не знают базовых приемов счета, они ими очень скоро овладевают, по мере того как набираются опыта в использовании методов, которым я их учу.

Поощряйте и снова поощряйте

Наблюдая за успехами детей, не забывайте говорить им, что они добились замечательного прогресса. Постарайтесь, чтобы слова поощрения звучали естественно. Всегда можно найти, за что ребенка похвалить, когда речь идет об освоении и использовании методов, изложенных в настоящей книге.

Например:

• «Очень многие ребята из старших классов не умеют делать того, что делаешь ты».

• «Ты можешь решить это в уме? Восхитительно!»

• «Вы знаете, что на изучение того, что вы усвоили за сегодняшнее утро, раньше уходило три недели?»

• «Мог ли ты подумать еще 10 минут назад, что сможешь решить это?»

Говорите всему классу и каждому отдельно взятому ребенку, что вы горды за них, что дела у них идут замечательно, что их класс — один из лучших, какие вам приходилось когда-либо учить. Но соблюдайте меру. Как только в своей похвале вы перестанете быть искренними, дети немедленно это почувствуют.

Вдохновляйте детей историями

Рассказывайте ученикам подлинные истории из жизни математиков, которые добились выдающихся результатов. Истории о людях, умевших вычислять в уме с поразительной скоростью, истории о таких математиках, как Тесла, Гаусс, Ньютон, Нейман. Историй, способных вдохновить детей, очень много. Поищите соответствующую литературу на полках магазинов или в интернете.

Ко мне, бывало, подходили дети после урока и спрашивали: «Вы действительно думаете, что я могу стать новым Эйнштейном?»

Приглашайте лекторов

Если вы знаете кого-нибудь, кто искренне любит математику и кому есть что рассказать, пригласите этого человека к себе в школу прочесть лекцию детям.

Или сами станьте таким лектором. У вас всегда есть что рассказать — хотя бы даже то, как вы открыли для себя методы, изложенные в этой книге. Нам всем нужны герои, на которых мы можем равняться. Почему бы не предложить детям героев, совершавших ранее или совершающих ныне значительные поступки в математике?

Игры и головоломки

Предлагайте ученикам несложные игры, чтобы привить им вкус к вычислениям. Задавайте головоломки различного уровня сложности. При этом старайтесь, чтобы каждый в классе был в состоянии решить хотя бы часть из предлагаемых вами задач. Учите детей способам их решения.

Находите такие книги с головоломками, которые не только предлагают сами задачи, но и толковое объяснение их решения.

Задавайте побольше вопросов из области математики. Знакомьте детей с применением математики в повседневной жизни. Всякий раз, когда ученик использует математику или ему нужны математические навыки для чего-либо, обращайте его внимание на значение математики. Задавайте вопросы, требующие математических знаний. Например:

• «Какая из этих вещей дешевле? Сколько это будет стоить?»

• «Сколько нам еще осталось проехать? С какой средней скоростью мы двигались? Сколько нам еще осталось ехать, если мы продолжим двигаться с теперешней скоростью?»

• «Что будет дешевле: ехать вчетвером на машине или на поезде? А если на самолете?»

• «Сколько бензина мы потратим, чтобы доехать до ___? Сколько это будет стоить?»

• «Во что нам обойдется месячное содержание лошади/пони?»

• «Сколько человек сейчас находится в классе?»

• «Если все присутствующие здесь будут сидеть по трое за одним столом, сколько их потребуется?»

• «Если каждому ученику надо дать по 10 книг, сколько книг потребуется, чтобы раздать всему классу?»

• «Если третью часть книг залило водой, сколько книг пострадало? Сколько уцелело? При цене 23 доллара за книгу сколько денег придется заплатить, чтобы заменить испорченные книги?»

Вместо того чтобы давать ученикам список вопросов, сделайте их органичной частью ваших бесед с классом. Придумывайте задачи вместе с классом. Предлагайте ученикам приносить в класс свои собственные головоломки.

1. Уверяйте их, что предложенная задача им под силу.
2. Покажите, как они могут с ней справиться.
3. Организуйте работу учеников.
4. Решите задачу вместе с учениками, если необходимо.
5. Говорите им, что если они теперь смогли решить, значит, смогут решить и вновь.
6. Подстегните их воображение. Посоветуйте им представить себя в ситуации, когда им будет по плечу решение любых задач. Каким бы оно было, если бы?.. Вообразите, что вы.
7. Делитесь с ними историями о людях, добившихся успеха. Вдохновляйте детей.

Приложение 3
Решение задач

1. Работайте, исходя из убеждения, что вы можете решить задачу, и тогда вы *решите ее*.

Тогда, по крайней мере, вы приступите к ее решению.

2. Упрощайте числа.

Посмотрите, как бы вы решали более простую задачу. (Что, если бы вместо 47,36 доллара в задаче значились 100 или 1 доллар?) Упрощение чисел часто позволяет увидеть нужное решение задачи. Запомните способ, с помощью которого вы решали «очевидную» задачу, и примените его к «более сложной».

3. Решайте задачи в обратную сторону.

Работайте от ответа в обратную сторону и следите за ходом решения. Часто есть возможность сочетать такой подход с описанным в пункте 2.

4. Используйте крайности — миллионы или нуль.

Иногда это помогает обнажить суть метода.

5. Нарисуйте схему.

Схемы помогают сделать условие задачи понятнее.

6. Переверните условие с ног на голову.

А что получилось бы, если бы все было наоборот?

7. Начните и делайте то, что вам под силу.

Выполнение каких-нибудь действий, даже если они вроде бы не имеют ничего общего с поиском ответа на задачу, часто помогает вам выйти на правильный путь.

Может оказаться, что некий сделанный вами ход станет важной частью решения задачи.

8. Ищите аналогии.

Походит ли эта задача на что-нибудь уже известное вам?

9. Отчетливо представьте себе ситуацию, описанную в задаче.

Некоторые логические задачи лучше всего решаются, если вы живо представили себе описанную в условии ситуацию.

10. Нет дальнейших идей — возвращайтесь к началу.

Лишний раз задайте себе вопрос, что вам известно из условия задачи.

11. Заменяйте понятия или используйте другие. Попробуйте изменить эмоциональный отклик, который вызывает в вас рассматриваемая ситуация.

Что было бы, к примеру, если бы речь шла о вас лично, Китае, Исландии, вашей матери?

12. Что бы вы делали, если бы могли решить эту задачу?

По крайней мере, вы бы что-нибудь да делали — так что не сидите просто так. Делайте что-нибудь!

13. Посмотрите на зависимости.

Спросите себя: если это увеличить, увеличится ли и это? Как на все это можно посмотреть с другой точки зрения?

14. Пробы и ошибки.

Очень часто данный метод упускают из виду. Это вполне законный подход, который нередко позволяет натолкнуться на способ решения.

15. Рассматривайте всевозможные варианты и идеи.

Не спешите отказываться от того или иного хода в решении той или иной идеи.

16. Разберитесь, о чем спрашивается в задаче.

Как стоит вопрос? Правильно ли я понял задачу?

Словарь

Вес разряда. Соответствующая степень числа 10, на которую надо умножить цифру в числе в зависимости от ее положения. Например, 34 является двузначным числом, в котором весом разряда для цифры 3 являются три десятка, а для цифры 4 — четыре единицы.

Вычитаемое. Число, подлежащее вычитанию из другого числа.

Делимое. Число, от деления которого на другое число получается результат деления.

Делитель. Число, на которое делится делимое в ходе операции деления.

Знаменатель. Число, записываемое под чертой дроби.

Квадрат. Произведение числа на самого себя. Например, квадратом 7 (7^2) является 49.

Квадратный корень. Квадратный корень из числа a — всякое число x (обозначаемое $\sqrt{a}$), квадрат которого равен a ($x^2 = a$). Например, квадратным корнем из 16 ($\sqrt{16}$) является 4 (так как $4^2 = 16$).

Константа. Постоянная величина. Например, число π («пи»), равное 3,14159.

Множимое. Число, на которое умножается другое число.

Множитель числа. Одно из двух и более целых чисел, произведение которых равно заданному числу. Множителями числа 6 являются 2 и 3.

Множитель. Число, которое умножается на другое число.

Неправильная дробь. Дробь, в которой *числитель* больше, чем *знаменатель*.

Общий знаменатель. Число, кратное *знаменателям* двух или более обыкновенных дробей, участвующих в вычислении.

Показатель степени. Число, записываемое мелким шрифтом вверху справа от числа и обозначающее, сколько раз данное число надо умножить на самого себя. 3^2 означает, что надо умножить 3 два раза (3 — это основание степени, а 2 — показатель степени). 6^4 означает 6 x 6 x 6 x 6.

Произведение. Результат перемножения двух и более чисел. (Ответ к задаче на умножение.)

Разность. Результат вычитания одного числа из другого. (Ответ к задаче на вычитание.)

Слагаемое. Одно из двух или более складываемых чисел.

Смешанное число. Число, представляющее собой сумму целого числа и дроби.

Сумма. Результат сложения двух и более чисел. (Ответ к задаче на сложение.)

Уменьшаемое. Число, из которого вычитается другое число.

Цифра. Любое из чисел от 0 до 9, из которых состоят все другие числа. Например, 34 — это двузначное число. (См. также *Вес разряда*.)

Частное. Результат деления одного числа на другое. (Ответ к задаче на деление.)

Числитель. Число, записываемое над чертой дроби.

Число. Любая комбинация цифр, например 10349 или 12831.

Основные термины арифметических вычислений

	23	Слагаемое		654	Уменьшаемое
+	14	Слагаемое	−	142	Вычитаемое
	37	Сумма		512	Разность

	123	Множимое		385	Делимое
×	3	Множитель	:	11	Делитель
	369	Произведение		35	Частное

* * *

ПО ВОПРОСУ ПРИОБРЕТЕНИЯ КНИГ ОБРАЩАТЬСЯ:
г. Минск, тел. (8-10-375-17) 237-29-76, e-mail: popuri@mail.ru; www.popuri.ru;
г. Москва, ООО «Издательский дом «Белкнига», тел. (495) 276-06-75; e-mail: popuri-m@mail.ru, popuri-mos@mail.ru.

Научно-популярное издание
ХЭНДЛИ Билл
БЫСТРАЯ МАТЕМАТИКА: СЕКРЕТЫ УСТНОГО СЧЕТА
Перевод с английского — *Е. А. Самсонов*.
Художественный редактор — *М. В. Драко*.

notes

Примечания

1

Яков Трахтенберг *(1888–1953)* — математик, уроженец г. Одессы, создавший систему для быстрого счета в уме, носящую его имя. Основал Институт математики в Цюрихе в 1950 г. — *Прим. перев.*

2

Десятичная дробь — представление числа в виде целой части и любого требуемого количества разрядов после десятичной запятой. Например: 3,14566780808. — *Прим. перев.*